<36621810540017 S

<36621810540017

Bayer. Staatsbibliothek

Math. R. 220

Jn. 5151[2]

Mathesi. Arithmetica generalis. Scripta varia arithmeticam illustr. 171.

R

Carl Friedrich Hindenburgs

Beſchreibung

einer ganz neuen Art,

nach einem bekannten Geſetze fortgehende Zahlen,

durch

Abzählen oder Abmeſſen

bequem und ſicher zu finden

---

nebſt Anwendung der Methode

auf verſchiedene Zahlen,

beſonders auf eine darnach zu fertigende

Factorentafel,

mit eingeſtreueten,

die Zahlenberechnung überhaupt

betreffenden Anmerkungen.

---

nebſt fünf Beylagen und einer Kupfertafel.

Leipzig,

bey Siegfried Lebrecht Cruſius.

1776.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Ich habe bey gegenwärtiger Abhandlung nicht viel zu erinnern. Die Veranlaſſung darzu iſt bekannt, und die Kürze der Zeit, die mich von allen Seiten einſchränkte, wird mir hoffentlich zur Entſchuldigung dienen, wenn man in dieſer Schrift vielleicht einige Spuren der Eilfertigkeit wahrnehmen ſollte.

Der Gedanke, die Zahlen in ihrer natürlichen Folge hinter einander, oder auch in jeder andern, nach Abſicht gewählten, Ordnung, nach einer dem Decimalſyſtem angemeſſenen Einrichtung, auf einmal, in von einander abgeſonderten Fächern, darzuſtellen, und, ſtatt der geforderten Zahlen ſelbſt, die man daraus finden ſoll, ihre Stellen durch Abzählen und Abmeſſen, durch Patronen und Inſtrumente, u. ſ. f. aufzuſuchen; dieſer Gedanke iſt, ſo viel ich weiß, ganz neu, und gehört, nach dem Ausſpruche ei-

nes der größten Kenner, zu den ungezwungenſten und brauchbarſten.

Der Vortheil einer ſolchen Einrichtung äuſſert ſich bey verſchiedenen Zahlen, auf verſchiedene Art. Bey Aufſuchung der Factoren iſt er auſſerordentlich beträchtlich; und es wird manchem in der That anfangs befremdend vorkommen, der das Verfahren für dieſe Zahlen, bey der hier getroffenen Anordnung, nicht kennt, wenn er hören wird, daß dasjenige, was zeither ſo vielen und großen Schwürigkeiten unterworfen geweſen iſt, gerade zu den leichteſten Aufſchlüſſen gehört, die durch eine ſolche Einrichtung gegeben ſind.

Die Geſetze, für welche hier die Zahlen von Hundert zu Hundert fortgehen, hätte man ſehr leicht, auch für Zahlen von Tauſend zu Tauſend, erweitern und einrichten können. Dieſe Erweiterung wäre aber unnöthig geweſen; man kann Geſetze von Tauſenden ſehr leicht aus denen von Hunderten haben, wenn man hier zehn Hunderte, die man einzeln mit Zahlen bezeichnet, für ein ganzes Geſetz von Tauſenden annimmt, und

nun

nun die Tauſender dieſen Geſetzen, wie vordem die Hunderter, vorſchreibt. Bequem wäre es unſtreitig geweſen, wenn man in der Beylage A, ſo wie in B, zehn Hunderter unter einander ſetzen, und in allen Beylagen fünf Colonnen auf eine Seite hätte bringen können. Die einzelnen Geſetze wären alsdenn nach Hunderten, die Colonnen nach Tauſenden, die halben Bogen nach Fünftauſenden, und die ganzen nach Zehntauſenden fortgegangen.

Bey näherer Unterſuchung der hier getroffenen Einrichtung, haben ſich bereits verſchiedene nicht unwichtige Folgen und Ausſichten gezeigt. Zu den beträchtlichern rechne ich das dadurch gefundene Geſetz der mechaniſchen Fortſchreitung der Quadrate und anderer Zahlen; die Erfindung der Form und des Perioden der Endzifern; die verſchiedenen Zahlengebäude, die zugleich mit dem decimalen gegeben ſind; und die Entwicklung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. Verſchiedene Unterſuchungen ſind dabey noch zurückgeblieben, und unter dieſen eine ſehr umſtändliche über einen ganz andern höchſt-

 wichti-

wichtigen Perioden der Zahlen, als derjenige iſt, von dem in der Beſchreibung hier und da geſprochen worden.

Ich kann dieſe Vorerinnerung nicht beſchlieſſen, ohne zugleich dem Herrn von Schönberg für viele bey dieſer Arbeit durch Zeichnen, Modelliren, und auf andere Art, freywillig über ſich genommene Bemühungen öffentlich zu danken. Er iſt lange Zeit der einzige und alleinige Zeuge der von mir getroffenen Anordnung und Bearbeitung der Zahlen, ihrer erſten Entwicklung, und nachherigen allmähligen Verbeſſerung geweſen, und ich habe mich ſeiner trefflichen Einſichten, und ſeines freundſchaftlichen Rathes, nicht ſelten dabey mit Vortheil bedient. Um ſo mehr iſt es mir angenehm, daß ich nun auch, von der durch Ihn veranſtalteten Berechnung einer ſehr umfänglichen Quadrat- und Cubiczahlentafel, nach einer bey dieſen Zahlen ganz neuen, höchſtvortheilhaften Einrichtung, die Verſicherung hier geben kann, daß ſolche, ihrer Weitläuftigkeit und des groſſen darauf zu verwendenden Fleißes unerachtet, in nicht gar zu langer Zeit, zu Stande ge-

de gebracht werden wird. Es hat nehmlich der Herr von Schönberg, welcher, ſeiner ſo ſehr ſchwächlichen Geſundheit wegen, nicht ſo zuſammenhängend, wie er wünſchte, daran arbeiten konnte, dieſe Berechnung nunmehr, nebſt allen dabey von ihm angebrachten Vortheilen, der Aufſicht eines Mannes von Thätigkeit und Einſicht, der auch bereits durch eigne Schriften dem Publico von einer vortheilhaften Seite bekannt iſt, übergeben. Dieſer wird die Berechnung auf des Herrn von Schönbergs Koſten, und nach dem von ihm angelegten unveränderlichen Plane, fortſetzen und beendigen laſſen, und für die möglichſte Berichtigung des Ganzen aus allen Kräften bemühet ſeyn. Die Tafel wird, da ſich wegen des ſo beſchwerlichen Druckes, und daher flieſſenden koſtbaren Verlagsvorſchuſſes, bisher noch kein Verleger darzu hat finden wollen, auf des Herrn von Schönbergs eigne Koſten gedruckt, und davon die weitere Nachricht zu ſeiner Zeit gegeben werden.

Die Gemeinnützigkeit ſolcher Tafeln überhaupt, wird Niemand in Zweifel ziehen, der ihre Abſicht kennt. Am ſicherſten überzeugt man

ſich

ſich von ihrem Nutzen durch den Gebrauch. Wie dergleichen Tafeln, durch ſchickliche Anordnung und Stellung ihrer Theile, bequem, eingerichtet werden können, das kann man am beſten aus Beobachtungen und Vorſchriften lernen, die Männer von erhabenen Einſichten gegeben haben. Hierher gehören vor andern, die leſenswürdigen Nachrichten von gröſſern logarithmiſchen, und andern ſonſt merkwürdigen Tafeln, und dadurch veranlaßten Unterſuchungen, die Herr Hofrath Käſtner ohnlängſt, der zweyten Sammlung ſeiner vortrefflichen aſtronomiſchen Abhandlungen vorgeſetzet hat, nebſt dem, was man hiervon in des Herrn Oberbaurath Lamberts ſehr wichtigen Beyträgen zur Mathematik und gleichſchätzbaren Zuſätzen zu den logarithmiſchen Tabellen ſelbſt nachleſen kann. Leipzig, den 25. September 1776.

I. Ein=

Einleitung. Gelegenheit und Abſicht dieſer Schrift. Neue Methode, Zahlen von ganz verſchiedenen Eigenſchaften, durch bloſſes Abzählen, oder Abmeſſen, leicht und bequem zu finden. Anwendung der Methode auf die theilbaren und untheilbaren Zahlen, in Beziehung auf eine dadurch zu fertigende Factorentafel. Allgemeine Anmerkungen dieſe und andere Arbeiten betreffend.

Die Unterſuchung der Zahlen, nach ihren Eigenſchaften und ihrer Fortſchreitung, gehört mit zu den angenehmſten Beſchäftigungen des Geiſtes, und kann leicht auch eben ſo brauchbar werden, wenn man nur nicht bey bloſſen, oft unfruchtbaren, Eintheilungen derſelben ſtehen bleibt, dergleichen die Pythagoräer unzählich viele erdichtet haben, und wenn man die Speculation, auf welche die dabey vorkommenden allgemeinen Formeln zunächſt führen, nicht zu weit über die Gränzen einer nützlichen Anwendung hinaus treibt. Was die Pythagoräer, unter dem Vorwande der Geheimniſſe der Zahlen, enthuſiaſtiſch anſtaunten, und, nach dem ſo gemeinen, durch die Erfahrung ſo bewährten, Schickſale entzückter Bewunderer, oft gar nicht, oder doch nicht recht, verſtanden, das iſt zu unſern Zeiten ein Gegenſtand einer ſtillen und ernſthaften Betrachtung geworden, nachdem man in der neuern Analyſis angefangen hat, alle Gröſſen, ohne Unterſchied, die ſichtbarlich ausgedehnten, ſo wie die blos intellectuellen, allgemein als Zahlen zu behandeln, ſo daß man ſich von der wirklichen Gröſſe einer Sache, nie gewiſſer und zuverläßiger verſichert hält, als wenn man, bey einer einmal angenommenen und feſtgeſetzten Einheit, das letzte Reſultat für dieſe Gröſſe, beqvem und genau in Zahlen auflöſen kann. Aus dieſen Gründen, und bey den oft ſo weitläuftigen Rechnungen, zu welchen die niedere und höhere Analyſis, theils an ſich, theils aber auch in ihrer Anwendung auf die ausübende Mathematik, durchgehends Ge-

legenheit giebt, haben ſich, bey den ſo mancherley Zahlen, Verhältniſſen und Formeln, verſchiedene Tafeln nothwendig gemacht, deren gemeinſchaftliche Abſicht dahin gehet, daß man, wie Herr Lambert ſagt, ein für allemal in denſelben berechnet finde, was man ſehr oft von neuem berechnen müßte, und daß man, ſo viel möglich, für alle Fälle berechnet finde, was man künftig, für jeden vorkommenden Fall, bereits berechnet zu haben wünſchet. Ich zweifle daher keinesweges, daß man auch gegenwärtigen Beytrag zu bequemer Erleichterung, und, in nicht wenigen Fällen, auch hinlänglicher Befriedigung, eines, nicht nur für einzelne Theile der Wiſſenſchaft, ſondern auch für das Ganze, ſelbſt für das gemeine Leben, ſo allgemein nothwendig gewordenen Bedürfniſſes, nicht gleichgültig aufnehmen werde.

Unter verſchiedenen Vortheilen, auf welche ich beym Nachdenken gefallen bin, wie man, theils angefangene nützliche Tafeln vortheilhaft erweitern, theils aber auch ganz neue leicht und ſicher berechnen könne, wozu mir vor andern die vom Herrn Profeſſor Lambert im Jahre 1770 herausgegebenen ſehr brauchbaren Zuſätze zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen die nächſte Veranlaſſung gegeben haben, hat mir keine Einrichtung ſo leicht und bequem in der Anwendung, und ſo allgemein und weitausſehend in ihren Folgen zu ſeyn geſchienen, als diejenige, die ich bereits vor einigen Jahren gefunden habe, da ich die Schwürigkeiten, die ſich bey einer weitfortzuſetzenden Factorentafel unüberſehbar anzuhäufen ſcheinen, auf eine thätige und wirkſame Art zu heben ſuchte. Ich habe zwar ſeit dieſer Zeit, ſo wie es die Gelegenheit gegeben, oft und mannichfaltig, mit meinen Freunden und Bekannten, davon geſprochen, auch ihnen zum Theil den Effect meiner Einrichtung durch Verſuche, jedoch mit Verſchweigung des dabey gebrauchten Vortheils, zu ihrer nicht geringen Bewunderung, vorgeleget: dennoch aber habe ich, da bis hierher Zeit und Umſtände ein

ſo weitläuftiges Unternehmen nicht nach Wunſch begünſtigten, niemals öffentlich davon Erwähnung gethan, aus der, gewiß nicht ungegründeten, Bedenklichkeit, einen Löwen — oder auch wohl ein Schaaf, vom Schlafe zu wecken, und dadurch, wiewohl mit ganz verſchiedenem Erfolge, meiner bereits angefangenem Arbeit, die nur mit leiſen gemächlichen Schritten auf ihrem Wege fortgieng, durch eigne Schuld, auf eine nachtheilige Art, Eintrag zu thun.

Die Wirkſamkeit meiner Methode in Abſicht auf die Erfindung der Diviſoren der zuſammengeſetzten Zahlen, nebſt den wichtigſten Puncten, was von ihr, für eine durch ſie zu fertigende Factorentafel, zu erwarten ſtehet, habe ich nunmehr, aus bewegenden Urſachen, in einer umſtändlichen gedruckten Nachricht vom 24ſten May dieſes Jahres dem Publico vorgeleget. Es kann nicht fehlen, (und dieſe Vorausſetzung gründet ſich auf Erfahrung) man wird den Innhalt dieſer Nachricht verſchiedentlich beurtheilet haben: einigen wird er wunderbar, andern vielleicht hier und da übertrieben, auch manchen faſt unglaublich vorgekommen ſeyn. Ich glaube daher, bey vielen ſehr wichtigen Urſachen von auſſen, und bey der innern Ueberzeugung von der Nützlichkeit eines ſolchen Unternehmens, hinlänglich entſchuldigt zu ſeyn, daß ich den Vorſtellungen meiner Freunde nachgegeben, und mich entſchloſſen habe, die Methode, wodurch dieſe Factoren ſowohl, als auch viele andere Zahlen, von ganz verſchiedener Natur, leicht und ſicher ſich finden laſſen, auch noch vor der Herausgabe der verſprochenen Factorentafel, gleichſam als eine vorläufige Probe, was man ſich von dieſer letztern in der Folge zu verſprechen habe, durch den Druck bekannt zu machen.

Was ich gegenwärtig den Kennern vorlege, enthält gewiſſermaſſen nur den Anfang einer Einrichtung, die ſich aber, ſobald man ſie einmal ihrer Natur nach hat kennen lernen, faſt eben ſo mannichfaltig abändern läßt, als verſchieden die

Eigenſchaften der Zahlen ſind, die man durch ſie zu ſuchen ſich vorſetzet. Ich bin hierbey dem, vom Euklides * vorgezeichneten, Wege der einfältigungekünſtelten Natur nachgegangen, wie die Beylagen A, B, C mit einem Blicke zu erkennen geben werden, von welchen die erſte, die natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung; die zwote, die geraden Zahlen; die dritte, die ungeraden Zahlen, (alſo die beyden letztern die einfachſten und weſentlichſten Elemente der erſten) enthält. Die Zahlen ſelbſt ſind durchgängig zuſammenhängend in Colonnen geordnet, mit angränzenden Seitenſtrichen, für die in ihrer Ordnung auf einander folgenden, oder auch, in gewiſſen Fällen, ſprungweiſe fortgehenden Hunderter, nebſt beygefügten lateiniſchen Initialbuchſtaben am Rande, auch über- und unterſchriebenen römiſchen und arabiſchen Ordnungszahlen, der ganzen Colonnen ſo wie der einzelnen Reihen, beydes, die Buchſtaben und Zahlen, ſowohl zu bequemer Vergleichung der auſſereinander, als auch zu nothwendiger Zuſammenkettung der neben einander liegenden, einzelnen Theile.

Auf dieſe Art enthält alſo die erſte Tafel alle ganze Zahlen in ihrer ununterbrochen fortlaufenden natürlichen Ordnung, und folglich auch alle Reihen der ganzen Zahlen, wie verſchieden und zuſammengeſetzt auch das Geſetz ihrer Fortſchreitung ſeyn mag. Die zwote Tafel faßt alle gerade [pares] Zahlen, und hiermit auch alle geradgerade [pariter pares] und ungeradgerade [pariter impares] Zahlen, von den bekannten ſehr einfachen Formen $2n$; $4m$; $2n(2m+1)$ in ſich. Die dritte Tafel liefert endlich die ungeraden [impares] Zahlen $2n+1$ in einer Reihe, und folglich auch alle ungeradungerade [impariter impares] Zahlen $(2n+1)(2m+1)$ welche aus der letztern Tafel, ſo wie die Zahlen der vorhergehenden Formen aus der zwoten, und beyder-

* Man ſehe die Erklärungen im ſiebenden Buche der Elemente.

beyderley Zahlen aus der erſten, mit gröſster Leichtigkeit und Sicherheit, bey ſucceſſiver Veränderung der in ihrem allgemeinen Ausdrucke befindlichen undeterminirten Gröſſen m, n, wie die Folge lehren wird, ohne alle Berechnung, durch bloſſes Abzählen, ſich finden laſſen. Man wird hieraus zugleich mit Ueberzeugung wahrnehmen, daß es hierbey auf nichts weiter ankömmt, als auf die Art, wie man die Formeln, für gewiſſe zu finden gegebene Zahlen, auf eine mit Abſicht und Ueberlegung gewählte Tafel, in welcher dieſe Zahlen mit enthalten ſind, eben ſo leicht und bequem, als für die hier genannten Zahlen, anwenden ſoll.

Wenn man den Definitionen des Euklides in ihrer Ordnung nachgehet, ſo kömmt man zunächſt an die Prim- und Zuſammengeſetztenzahlen [numeros primos et compoſitos] mit deren Unterſuchung und Vergleichung gegen einander, die Alten und Neuern ſich vielfältig beſchäftigt haben. Von beyderley Zahlen findet man verſchiedene wichtige Sätze in des Euklides arithmetiſchen drey Büchern, mit ſynthetiſcher Eleganz und Evidenz erwieſen; gleichwohl aber unter allen nicht einen einzigen, wodurch man die Aufgabe: die Theiler einer gegebenen Zahl zu finden, aufzulöſen im Stande wäre; denn der 33ſte Lehrſatz im ſiebenden Buche: daß jede zuſammengeſetzte Zahl durch eine Primzahl getheilt werden könne, zeigt nur die Schwürigkeit, ohne ſie zu heben. Es hat auch vor Fermaten und Eulern Niemand etwas Erhebliches von den Theilern der Zahlen bekannt gemacht, ſo wie, meines Wiſſens, vor der Pelliſchen Tafel, kein einziges, auf ſo weit, oder noch weiter, gehendes Verzeichniß dieſer Zahlen, vorhanden geweſen, man müßte denn etwa dergleichen, wider Vermuthen, ſelbſt wider alle Wahrſcheinlichkeit, in den, zum Theil ſchätzbaren, Schrifften der alten Coſſiſten antreffen. Die Schwürigkeit, dieſe Zahlen, bis auf eine ſehr weit ausgedehnte Gränze, zu berechnen, iſt unſtreitig die vorzüglichſte Urſache, warum man mit einer ſolchen

Tafel, bey ihrer ſo allgemein erkannten Brauchbarkeit, noch ſo weit zurück iſt; denn an geſchäftigen arbeitſamen Rechnern, ſelbſt an ſolchen, welche die Ausübung mit den vortreflichſten theoretiſchen Kenntniſſen verbanden, hat es, wenigſtens in dem vorigen Jahrhunderte, gewiß nicht gefehlt, wovon ſelbſt die, auf die mühſamſte Art, berechneten logarithmiſchen und trigonometriſchen Tafeln hinlänglich Zeugniß geben können. Dieſe Schwürigkeit ſoll nunmehro, ſo weit es die Natur der Sache verſtattet, ganz gehoben werden, wobey ich mich, um nicht weitläuftig zu ſeyn, aller umſtändlichen Beweiſe, einen einzigen Fall ausgenommen, mit gutem Vorbedachte enthalten werde; denn die Mathematikverſtändigen werden ſolche ſehr leicht, und die übrigen Liebhaber ſehr gern entbehren.

Bey der Aufſuchung dieſer Zahlen, nach der hier getroffenen Einrichtung, wird man ſich, nach dem, was bereits geſagt worden iſt, vor allen Dingen, nach ihrem allgemeinen Ausdrucke umſehen müſſen, um ſolchen entweder auf eine der vorerwähnten drey, oder auch auf eine andere, der Natur dieſer Zahlen näher entſprechende Tafel, anzuwenden, und ſich dadurch die wirkliche, ſo mühſame Berechnung, zu erſparen. Die zuſammengeſetzten Zahlen ſind in dem ſo einfachen Ausdrucke m n allgemein begriffen, in welchem m und n jede theilbare oder untheilbare Zahl, einzeln und in Verbindung mit einander, ſeyn kann, wenn nur, für den Fall, daß Beyde Primzahlen ſeyn ſollen, eine davon gröſſer iſt als Eins. Ganz anders verhält es ſich hingegen mit den Primzahlen, deren entſcheidender und weſentlicher Charakter, daß ſie ſich nehmlich durch keine andere Zahl theilen laſſen, ſo in die Augen fallend ſolcher auch, dem erſten Anſehen nach, zu ſeyn ſcheint, ſich bis hieher dennoch nicht auf eine leichte, geſchmeidige allgemeine Form hat bringen laſſen, und es giebt hier noch Lücken, die ſelbſt der tiefforſchende Geiſt eines Eulers auszufüllen nicht vermögend geweſen

iſt.

iſt. Gleichwohl aber darf man dieſerwegen die Sache, wenigſtens in Abſicht auf die Auffſuchung dieſer Zahlen, nicht als verlohren aufgeben, wenn man nur, was im gemeinen, ſo wohl civilen als blos animaliſchen, Leben, täglich, und zum größten Nachtheile der empfindenden Creatur geſchiehet, auch einmal, mit einer kleinen Ausnahme, zu nicht geringem Vortheile, auf dieſe, ganz fühlloſen Zahlen anwendet: wenn man ſie, da man ihnen gerade zu und von vorne, nicht beykommen kann, liſtig umſchleicht, und ihnen die längſt vermißten Vortheile, ſo zu ſagen, von der Seite, quaſi aliud agendo, abgewinnt. Den Weg hierzu bahnen ſelbſt die theilbaren Zahlen, und wird man, wenn es ein Mittel giebt, dieſe Zahlen leicht zu finden, auch zugleich die untheilbaren Primzahlen nebenher mit finden, da ſchon Euklides im 34ſten Satze ſeines ſiebenden Buches erwieſen hat: daß jede Zahl entweder ſelbſt eine Primzahl, oder eine, durch eine Primzahl theilbare, zuſammengeſetzte Zahl iſt.

Man findet alſo die Primzahlen auf ſolche Art nur indirecte oder ausſchlieſſungsweiſe, vermittelſt der directe geſuchten theilbaren Zahlen. Auch kann ich mir nicht vorſtellen, daß man dieſe Zahlen jemals auf eine andere Weiſe geſucht und gefunden habe; wobey man zum öftern die Schale ſtatt des Kerns aufbehalten, die theilbaren Zahlen mit ihren Factoren, wie Peter Jäger und andere vor ihm gethan, gleich verächtlicher Spreu weggeworfen, und nur die Primzahlen, als die vermeintlich guten Körner, beybehalten hat, ob man gleich bis itzt noch nicht beſtimmt ſagen kann, was für einen beſondern Nutzen man ſich von einem bloſſen Primzahlenregiſter, auſſer der Verbindung mit den theilbaren Zahlen, verſprechen könne. Man merke ſich indeſſen dieſe beyden Wege, als bequeme Erfindungsmittel. Man wird zwiſchen ihnen, für gewiſſe gegebene Zahlen immer eine Auswahl treffen können, ie nachdem die Natur dieſer Zahlen, oder auch gewiſſe Abſichten, Veranlaſſung dazu geben. In

gewiſſen Fällen, wie hier bey den Primzahlen, wird es unmöglich, oder doch höchſt beſchwerlich, den geraden Weg zu gehen; in andern Fällen wird man, mit Rückſicht des gröſſern oder kleinern Zeitverluſtes, der Beförderung dieſes oder jenes Endzwecks, beyde Wege, einzeln oder auch in Verbindung mit einander, einſchlagen können. Ein einleuchtendes Beyſpiel wird unten, bey Aufſuchung der Zahlen von der Form $2^n \cdot 3^m \cdot 5^p \cdot 7^q \ldots$ vorkommen.

Aber wie findet man nun die theilbaren Zahlen mn, in ihrer Ordnung, ohne ſie erſt zu berechnen, auf eine leichte und bequeme Art? Die Antwort auf dieſe Frage, und mit ihr zugleich die Auflöſung der ganzen Schwürigkeit, ſoll nun gegeben werden.

Auf die Seitenſtriche der Tafel A ſchreibe man die Hunderter von 0 an, nach ihrer Ordnung hinter einander, ſo erhält man dadurch, mit gröſter Geſchwindigkeit, die Reihe der natürlichen Zahlen, ſo weit ausgedehnt, als man nur will. Ein einziger, auch nur halbverſtändiger Blick auf die ſo vorgerichtete Tafel, wird ſogleich zeigen, daß man durch ſie die Vielfachen [multipla] jeder Zahl (wegen der ſo bequemen dekadiſchen Fortſchreitung des Ganzen, nach welcher jedes zunächſt unten anliegende Fach, von dem gerade drüber ſtehenden, um 10, und das noch um eine Reihe tiefere, um 20 u. ſ. w. Stellen oder Fächer entfernt iſt) mit gröſter Leichtigkeit finden kann. Eine Anwendung hiervon mag die Zahl 61 geben, deren Vielfache man nach der Reihe ſuchen ſoll. Man nehme das Fach 61, das zu 0 Hundert gehört, und ſchreibe darein die Zahl 1; von dieſem Fache zähle man, ſenkrecht unterwärts, 10, 20, 30, 40, 50, 60 Fächer ab, und ſchreibe in das nächſt rechter Hand anliegende 61ſte Fach, die Zahl 2; von dieſem letzten Fache zähle man weiter, bis auf 60 Fächer, ſenkrecht unterwärts fort, und ſchreibe in das nächſt angränzende 61ſte Fach die Zahl 3; und ſo fahre man, auf die nur angezeigte Art, mit Einſchreibung der Ordnungszahlen

zahlen ſo weit fort, als die vorgeſetzte Abſicht es erfordert: ſo wird man die Vielfachen dieſer Zahl, mit gröſster Behendigkeit, in der Tafel finden und anmerken können. Sucht man, für eben dieſe Hunderter, auch die Vielfachen anderer Zahlen: ſo muſs man, Verwirrung zu vermeiden, mit den Ordnungszahlen auch zugleich die Zahlen, deren Vielfache man ſucht, mit einſchreiben. Die Ordnungszahl zeigt nehmlich jedesmal das wie vielfache von der gegebenen Zahl man gefunden habe, und ſo ſind beyde Zahlen zuſammen Factoren, einzeln aber Diviſoren, des in der Tafel jederzeit ſchon fertig vorhandenen Products.

Auf dieſe Art, wenn man nehmlich mit den andern Zahlen eben ſo, wie hier mit 61 gezeiget worden iſt, verfährt, und wenn man noch, für gröſſere Diſtanzen, ſtatt des Abzählens, einen Zirkel, einen Winkelhaken, oder ein anderes bequemes Inſtrument ſubſtituirt, lieſſe ſich, mit gröſter Leichtigkeit und Sicherheit, ein überallemaſſen erweitertes Einmaleins, oder ein *m* mal *n* ausarbeiten, das zu Erreichung des vorgeſetzten Endzwecks vollkommen geſchickt ſeyn würde.

Und dennoch wird man ſich hierzu, bey allem anſcheinenden Vortheile, der Tafel A nicht bedienen, und das mit vielem Rechte, ſobald ſich zeigen läſst, wie man durch eine andere Tafel einen nähern Weg gehen kann. Man muſs ſich hier nicht übereilen. Es kann einem, bey Auswahl der Tafel für gewiſſe geforderte Zahlen, die man durch ſie ſuchen will, eben ſo gehen, wie den Anfängern in der Algebra, und warum nicht auch zuweilen ſelbſt den Meiſtern in der Kunſt? wenn ſie die Auflöſung eines Problems durch eine ganz unſchickliche, oder doch der Sache nicht gehörig angemeſſene Benennung der Gröſſen, mit unnöthigen Weitläuftigkeiten, oft auch Schwürigkeiten, überladen, da man ſie im Gegentheil ganz in der Nähe, mit gröſster Eleganz hätte finden können, wenn man nur vorher, ehe man Hand ans Werk

 legte,

den Kopf gebraucht, die Natur der Sache reiflich über⸗dacht, und die Dependenzen der dabey vorkommenden Gröſſen gehörig in Erwägung gezogen hätte.

Es haben ſchon Poetius, und andere vor ihm, erinnert, daß man, bey Aufſuchung der Factoren für die theilbaren Zahlen, alle gerade Zahlen, ſo wie diejenigen, deren Ziffer ſumme oder Collect ein Vielfaches der 3 iſt, nebſt denen die ſich auf 5 endigen, mit groſſem Vortheile übergehen könne, weil man, durch die dekadiſche Einrichtung des ge⸗wöhnlichen Zahlengebäudes ſogleich, und mit einem Blicke, überſiehet, daß ſich ſolche Zahlen durch 2, 3, oder 5 dividiren laſſen. Dieſer Vortheil, den auch Herr Lambert in ſeiner Tafel beybehalten, und durch die, in dieſer Rückſicht, getroffene, ſo vortreffliche Stellung der Zahlen, noch mehr empfohlen hat, verkürzt die ganze Arbeit ungemein; und da nunmehr die geraden Zahlen ganz wegfallen, ſo wird man wohl kein Bedenken tragen, die Tafel C der ungeraden Zahlen, der Tafel A, in welcher gerade und ungerade Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung mit einander vermiſcht ſind, in dieſer Abſicht weit vorzuziehen.

Ehe ich aber zu der würklichen Aufſuchung dieſer Zahlen fortgehe, muß ich noch zwo allgemeine Anmerkungen vorausſchicken, die mir beyde gleich wichtig ſcheinen. Man wird zugeben

1) daß die drey Tafeln A, B, C, alle mögliche ganze Zahlen und Zahlenreihen enthalten, und auch noch eine gewiſſe Auswahl bey dem Gebrauche übrig laſſen. Dadurch aber wird keinesweges behauptet, daß ſich, für gewiſſe Zahlen, nicht auch andere, in jeder arithmetiſchen, geometriſchen, harmoniſchen Progreſſion, oder auch nach irgend einem andern, aus der Natur der zu ſuchenden Zahlen hergeleiteten Geſetze, fortgehende Zahlen, in Fächer ein⸗ſchreiben, und in einen ſchicklichen Perioden bringen laſſen. Man hat nur, da man doch nicht alles liefern kann, die

die drey Haupt- und Stammtafeln aller übrigen, dem Publico vorlegen, an ihnen den ſo weitausſehenden nützlichen Gebrauch in einigen wenigen Beyſpielen zeigen, und die Kenner und Liebhaber auf dieſen Vortheil aufmerkſam machen wollen. Hiernächſt iſt zu erinnern,

2) daß man jedesmal, nachdem man die zu einer gewiſſen Abſicht ſchickliche Tafel gewählet hat, die Specialvortheile der vorhabenden Arbeit, ehe man noch die Bearbeitung ſelbſt anfängt, ſo viel immer möglich, das heißt, ſo weit es die durch ihre Gröſſe beſchränkte Tafel zuläßt, mit der Tafel ſelbſt, die an ſich zu Findung vieler andern Zahlen brauchbar ſeyn kann, auf das genaueſte zu verbinden ſuchen müſſe. Auf ſolche Art wird nicht nur Zeit und Mühe erſpart, ſondern es kann auch noch über dieſes, durch Auffindung ſchicklicher Patronen und anderer Inſtrumente, zu völliger Deckung der unbrauchbaren, und bequemer Abmeſſung der brauchbaren Fächer, welche die jedesmalige Abſicht leicht an die Hand geben wird, die ganze Arbeit beträchtlich und mit Sicherheit erleichtert und verkürzet werden.

So enthält z. E. die Tafel C der ungeraden Zahlen $2n \pm 1$, alle mögliche Zahlreihen, deren einzelne Glieder ſich nie anders als auf eine ungerade Zahl endigen, alſo auch alle ungeradungerade Zahlen, alle Potenzen der ungeraden Zahlen, alle Primzahlen und Producte der Primzahlen in einander, mit Ausſchlieſſung der Primzahl 2 u. ſ. w. Um nun dieſe Tafel, zu dem vorhabenden Gebrauche bequemer einzurichten, iſt wohl nichts natürlicher als der Gedanke, ob man nicht, ſo wie alle durch 2 theilbare Zahlen in ihr ermangeln, auch die Fächer der durch 3 und 5 theilbaren Zahlen aus derſelben wegſchaffen, oder ſolche doch wenigſtens, ein für allemal, durch eine leichte, ſehr kenntliche, und ſogleich in die Augen fallende Bezeichnung, von den übrigen Fächern unterſcheiden könne: Eine unmittelbare Anwendung

dung hiervon, läßt ſich auf die durch 5 theilbaren Zahlen, vermittelſt ſenkrechter, ſich parallel bleibender Durchſtreichung der mit 3 und 8 über= und unterſchriebenen Verticalreihen der einzelnen Colonnen, ſogleich machen. Auf ähnliche Art, wenn man von der Zahl 03 anfängt, und die jedesmal von da an um drey von einander entfernte Fächer, wie ſolche in natürlicher Ordnung auf einander folgen, durch Ziehung eines Querſtrichs durch die Ecken dieſer Fächer, von der rechten Hand nach der linken zu, anmerkt, findet man die Fächer aller durch 3 theilbaren ungeraden Zahlen vermittelſt gerader, ſich gleichfalls beſtändig parallel bleibender, Diagonalen durch die Winkelpuncte dieſer Fächer, von den übrigen deutlich abgeſondert, ſo daß man in der Folge, ohne weitere Abzählung von drey zu drey, die Fächer dieſer Zahlen ganz mechaniſch diagonaliſiren kann. Die Zahl 5 hält durchgängig, (wenn man, wie hier geſchiehet, alles auf Hunderter beziehet; für andere kleinere oder gröſſere, Einheiten, iſt es anders) innerhalb den Gränzen von 50 Fächern ihren beſtimmten und feſtgeſetzten Perioden; die Zahl 3 hingegen, vollendet ihren Umgang nur erſt nach dreymal 50 Fächern. Aus dieſer letztern, für die Zahlen 3 und 5 harmoniſchen Wiederkehr, wird die Urſache begreiflich, warum man die Hunderter in einer Colonne (wie hier in der Tafel C*) oder auf einer Seite, oder auch, nachdem es die Umſtän-

* Für dieſe Tafel, als einer allgemeinen Tafel der ungeraden Zahlen, war es nicht ſchlechterdings, wie bey der Tafel Cc, nothwendig, die Hunderter nach einem Vielfachen der 3 hinter einander zu ordnen. Man hätte auch hier, wie bey der Tafel B, der geraden Zahlen, zehn Hunderter untereinander ſetzen können; und ich würde dieſe Symmetrie auch bey der Tafel C beobachtet haben, wenn nicht, während einer kleinen Abweſenheit von dem Druckorte, dieſe Tafel, in Abſicht auf die Hunderter, gleichförmig mit der Tafel Cc eingerichtet worden, und ſelbige, bey meiner Rückkehr, ſchon ganz fertig abgedruckt geweſen wäre. Die Sache iſt

Umſtände erfordern, auf einem ganzen Bogen, nach einem Vielfachen der Zahl 3 beſtimmen muß, um dieſe Colonne, dieſe Seite, dieſen Bogen, die man ein für allemal muß ſetzen laſſen, blos durch wiederholte Abdrücke, die alsdenn ununterbrochen aneinander paſſen, bis zu jeder verlangten Gränze vervielfältigen zu können. Eine ähnliche Vorſicht muß man auch, in Abſicht auf andere zu ſuchende Zahlen, im Voraus empfehlen, und es wird nicht ſchwer ſeyn, nach der hier gegebenen Anleitung, jedesmal auf die vorkommenden Fälle, die nöthige Einrichtung zu treffen.

Was ſich, auf vorbeſchriebene Art, in dem Bogen C, durch ſenkrechte und ſchiefe Parallelen, beſtimmen und auszeichnen läßt, das iſt, zu mehrerer Bequemlichkeit für die Liebhaber, in der Beylage Cc, durch Eindruckung deutſcher und lateiniſcher Buchſtaben kenntlich gemacht worden. Die deutſchen Buchſtaben bezeichnen hier alle Fächer der durch 3, die lateiniſchen alle Fächer der durch 5 theilbaren ungeraden Zahlen, d. i. aller Zahlen von den Formen $3[2n+1]$ und $5[2n+1]$; und ſo iſt hierdurch die Haupt- und Stammtafel C aller durch 2 nicht theilbaren Zahlen, in die Specialtafel Cc aller durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, d. i., aller Zahlen, von der Form $2.\ 3.\ 5n \pm [1 \ldots 7 \ldots 11 \ldots 13]$ oder $30n+m$, (wo n jede Zahl, m aber nur eine bis an 30 hinan, durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahl, alſo keine andere als eine von den Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ſeyn kann) umgeſchaffen worden, jedoch ſo, daß auch die von dieſer Tafel nun ausgeſchloſſenen Zahlen, wegen ihrer unumgänglich nothwendigen Gegenwart bey der Arbeit ſelbſt, mit größter Deutlichkeit vor Augen liegen.

Was im Vorhergehenden bey der Tafel A gezeigt worden iſt, läßt ſich eben ſo leicht, auch auf die Tafeln C und Cc

iſt gleichwohl hier ganz unſchädlich; und ich habe dieſe Anmerkung nur für diejenigen beygefügt, welche etwa glauben möchten, eine ſolche Einrichtung wäre überhaupt für die ungeraden Zahlen vorzüglich bequem, oder wohl gar nothwendig.

Cc anwenden, und man bekommt durch ſie die Vielfachen jeder in ihnen befindlichen Zahl, auf eben dem Wege, wie bey der erſten Tafel, nur mit dem Unterſchiede, daß, weil hier die Zahlen von zwey zu zwey anwachſen, auch die Ordnungszahlen dieſer Vielfachen von zwey zu zwey, und zwar von 1 an, alſo nach den ungeraden Zahlen, fortgehen werden. Beyde Zahlen zuſammen, ſind hier wie dort, Factoren, alſo einzeln genommen, Diviſoren des in dem zugehörigen Fache befindlichen Productes. Sucht man aber, wie itzt gezeigt werden ſoll, nur den kleinſten, keine andere Diviſoren: ſo verkürzt ſich noch dadurch die Arbeit beträchtlich, daß man nur den gegebenen Diviſor, der allemal eine Primzahl iſt, nicht aber ſeine Ordnungszahl, in die Fächer einzuſchreiben braucht, und daß man ſogleich mit dem Quadrate dieſer Primzahl in die Tafel hineingehen kann. Beyde Vortheile, beſonders aber der letztre, ſind ſehr beträchtlich, und wenn man die Primzahlen, von 7 an, nach ihrer Ordnung, durch die Tafel Cc, bis an eine feſtgeſetzte Gränze durcharbeitet: ſo iſt die Tafel jedesmal bis an das Quadrat der neuen folgenden Primzahl ganz fertig. Unter den kleinſten Factoren der erſten Million iſt die Primzahl 997 die letzte. Alle dieſe 165 Factoren (denn die Zahlen 1, 2, 3, 5 können hier, da ſie nicht weiter in Betrachtung kommen, nicht mitgerechnet werden) bleiben auch in der zwoten Million, in welcher ſie, (da man für ſie den Vortheil ihrer Quadrate nicht, wie bey der erſten Million, nutzen kann) auch öfterer vorkommen, und über dieſes noch in Geſellſchaft von 55 neuen Factoren, bis mit der Primzahl 1409 auftreten, bey denen aber der Vortheil ihrer Quadrate wieder benutzt werden kann. Auf ähnliche Weiſe wächſt die Arbeit in ihrem Fortgange beſtändig, ſo, daß folgende Millionen, oder auch andere Theile des Ganzen, allemal ungleich beſchwerlicher zu berechnen ſind, als vorhergehende; und man überſieht zugleich mit der lebhafteſten Ueberzeugung,

daß

daß dieſe Schwürigkeit ſo weſentlich mit der Natur dieſer Zahlen verwebt iſt, daß für ſie keine weitere Erleichterung von irgend einer Methode zu erwarten ſtehet; denn auch ſelbſt die Kunſt, wenn ſie Jemand erfände, zu jeder gegebenen Zahl, den kleinſten Factor auf der Stelle hinzuzuſchreiben, würde doch nur die Schwürigkeit verhältnismäßig vermindern, aber nicht heben, da in den ſpätern Millionen der untheilbaren Zahlen immer weniger, der theilbaren Zahlen aber mehr werden.

Und dennoch fehlt vielleicht dieſem letztern, ſehr ſcheinbaren Gedanken, zu ſeiner vollſtändigen Richtigkeit nichts weiter — als die Wahrheit. Für viele, gewiß ſehr viele Millionen vom Anfange herein, iſt er ungezweifelt gewiß; ob aber auch für ſehr ſpäte, für alle, und beſtändig: dawider ſcheint ſelbſt eine nicht ſchwer anzuſtellende Induction zu ſtreiten. Ich habe weder Zeit noch Luſt, einen für meine Abſicht völlig unbrauchbaren Satz, der mehr eine unzeitige Neugierde zu befriedigen, als einen reellen Nutzen zu befördern ſcheint, durch einen weitläuftigen ſtrengen Beweiß a priori zu unterſtützen oder zu verwerfen; und ich bin gewiß, daß ich, ſo lange die Welt ſtehen wird, durch keine, auch auf noch ſo viele Millionen ausgedehnte Tafel, eben ſo wenig a poſteriori, aus den Millionen, widerlegt werden kann. Die Behauptung, daß für gleichgroſſe Theile die Arbeit in der Folge beträchtlich anwächſt, bleibt dabey vollkommen geſichert, auch kann man den Fortgang der Schwürigkeiten, wenn man will, allemal ſehr ſcharf und genau berechnen.

Aus dem, was hier geſagt worden iſt, könnte es ſcheinen, daß man zu Abzählung der theilbaren Zahlen, bis an eine gewiſſe Gränze, die Primzahlen wenigſtens bis an die Quadratwurzel dieſer Gränze, alſo bey der erſten Million, wenigſtens bis mit auf die Primzahl 997, im Voraus berechnet haben müßte; und da würde man mit Recht fragen, auf was für einem Wege man zu der Kenntniß dieſer Zahlen

auf

auf ſo weit, gelangen könnte? Was man anfänglich wohl nicht vermuthet hätte, iſt dennoch gewiß und zuverläßig, daß ſich dieſe Primzahlen, während der Bearbeitung der theilbaren Zahlen, von ſelbſt, und noch viel weiter als man ſie zu der vorhabenden Abſicht braucht, ergeben. Die Folge wird dieſes augenſcheinlich darthun, wobey hier und da noch verſchiedenes erinnert werden wird, was zu näherer Aufklärung und unumſtößlicher Gewißheit des bisher Vorgetragenen dienen kann, das vielleicht noch nicht allen Leſern gleich verſtändlich geweſen iſt.

Daß die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 die erſtern, in ihrer Ordnung auf einander folgenden Primzahlen ſind, bedarf keines Beweiſes. In der Tafel Cc ermangeln an ſich alle durch 2 theilbare Zahlen, und die Art und Weiſe, wie dieſe Tafel im Vorhergehenden, für die Primzahlen 3 und 5, als Diviſoren, (an deren Stelle hier die deutſchen und lateiniſchen Buchſtaben geſetzt worden ſind) eingerichtet, und in eine Specialtafel aller durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen verwandelt worden, wird zugleich den Weg zeigen, wie man aus ihr eine Tafel, aller durch 2, 3, 5 und 7 nicht theilbaren Zahlen machen kann, indem man die 7, eben ſo, wie vorher mit der 3 und 5 geſchehen, durch die Tafel durcharbeitet, und dieſe Zahl, von 07 an, in die zugehörigen Fächer der Producte aus ihr, die nicht ſchon mit den vorhergehenden kleinern Factoren 3 oder 5 beſetzt ſind, jedesmal einſchreibt. Man kann aber hier den neuen Diviſor 7 nicht eher, als in dem Fache der Zahl 49, d. i. bey der Quadratzahl von 7 anmerken, da in die vorhergehenden Fächer der Zahlen 21, 35, bereits die Factoren 3, 5 als die kleinſten Diviſoren dieſer Zahlen eingetragen worden. Eben dieſes muß auch nothwendig bey dem Einſchreiben der nächſthöhern Primzahl erfolgen, weil jedes, dieſer Primzahl zugehörige Fach, deſſen Zahl, durch dieſen neuen Diviſor dividirt, einen Quotienten giebt, welcher kleiner iſt, als dieſer Diviſor, eben deswegen ſchon durch dieſe

kleinere

kleinere Zahl, oder ihren noch kleinern Diviſor beſetzt ſeyn wird. Ueberhaupt kann alſo die in ihrer Ordnung folgende Primzahl p, mit Uebergehung aller, von p an, nach der Zahl p, abgezählten, in ununterbrochener Reihe aufeinander folgenden Producte, $3p$, $5p$, $7p$, $9p$ ꝛc. deren Coefficienten kleiner ſind als p, nicht eher, als in das Fach von pp, dem Quadrate von p, eingeſchrieben werden; woraus zugleich deutlich erhellet, daß für jede zwo nächſte Primzahlen p, π, die Tafel bis an π^2 ganz fertig ſeyn wird, ſobald p in ihrer Ordnung, ſo wie alle vorhergehende Primzahlen, wenigſtens bis auf ſo weit, in die Tafel eingetragen worden. In dieſer Tafel geben alsdenn die mit Diviſoren beſetzten Fächer alle theilbaren, die leeren Fächer aber alle untheilbaren oder Primzahlen, bis an die Zahl π^2; und ſo iſt denn eine Tafel aller durch $2, 3, 5, 7 \ldots p$ nicht theilbaren Zahlen, zugleich auch eine Tafel aller bis an π^2, in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgenden Primzahlen, und kann man hierdurch, aus den gegebenen vorhergehenden Primzahlen, die folgenden leicht und bequem finden. Für die Primzahlen 1, 2, 3, 5 ſey $p=3$; $\pi=5$; man verwandle die Tafel C, auf vorbeſchriebene Art, in eine Tafel aller durch 2, 3 nicht theilbaren Zahlen, deren Form $2.3n \pm 1$ d.i. $6n+1$ oder $6n-1$ ſeyn wird *), ſo ſind alle ledige Fächer dieſer Tafel, bis an $\pi^2=25$, mit Primzahlen

*) Hierdurch wird Joh. Bernoullis Satz: Omnis numerus primus differt vnitate a multiplo ſenarii, exceptis 2 et 3, verſtändlich; denn die Formel $6n \pm 1$ enthält überhaupt jede durch 2 und 3 nicht theilbare Zahl, und unter dieſen ſind auch alle Primzahlen, 2 und 3 ausgenommen. Man ſiehet auch, woher in ſeinem folgenden Satze die multiplices ſenarii vnitate diminuti und multiplices ſenarii vnitate aucti herkommen, und wie in den beyden Reihen, die dieſe Formel enthält, die theilbaren Zahlen von den Primzahlen abgeſondert werden. Io. Bernoulli Opp. Tom. I. p. 89, 90. Poſit. XXII. XXIII.

zahlen beſetzt, und die natürliche Reihe der Primzahlen iſt nun 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, aus den erſten vieren richtig beſtimmt. Man nehme ferner $p=5$; $\pi=7$: ſo ſetzt die Tafel Cc aller durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, zu den vorigen Primzahlen noch folgende 29, 31, 37, 41, 43, 47, bis an $\pi^2=49$ hinzu; und ſo findet man für $p=7$; $\pi=11$; (wenn man die 7 wie vorher die 3 und 5 durch die Tafel Cc, wenigſtens bis auf π^2 durcharbeitet) alle Primzahlen bis an $\pi^2=121$; alſo für $p=31$; $\pi=37$, auf eben dem Wege, alle Primzahlen bis an $\pi^2=1369$ d. i. mehrere, als man zu Berechnung einer Factorentafel bis auf eine Million nöthig hat. Man darf aber für die Erfindung dieſer Primzahlen nichts thun, was man nicht ſchon an ſich für die theilbaren Zahlen thun müßte: und ſo findet man denn dieſe Primzahlen, indem man die theilbaren Zahlen ſucht, neben her, ohne allen Zeitverluſt, bis auf eine feſtgeſetzte Gränze, in ihrer natürlichen Ordnung hintereinander.

II.

Anwendung der Methode auf das erſte Tauſend. Beſchreibung hierzu dienlicher Patronen, und zweyer in der Folge ſehr brauchbaren Inſtrumente.

Eine Anwendung hiervon für das erſte Tauſend zu machen, nehme man die Tafel Cc, und ſchreibe die Hunderter von 0 an bis mit auf 9 über die am Rande, linker Hand der Colonnen, befindlichen Seitenſtriche, unter einander. Die durch 3 und 5 theilbaren Zahlen, ſind ſchon an ſich, ſo wie alle gerade Zahlen, durch die Tafel ausgeſchloſſen, und die Fächer, in welche die Vielfachen dieſer Zahlen fallen, da man ihre Factoren nicht anzumerken braucht, dieſerhalb mit Buchſtaben, dennoch aber ſehr kenntlich (ein Fach, in welchem deutſche und lateiniſche Buchſtaben ſich durchkreuzen, gehört für beyde Factoren 3 und 5 zugleich) beſetzt. Folglich iſt 7 die nächſte und erſte Primzahl, die man als einen Factor

durch die Tafel durcharbeiten muß. Man gehe alſo ſogleich bis auf das Quadrat von 7 d. i. 49 in die Tafel hinein, und ſchreibe in das zugehörige Fach die Zahl 7 ein, indem man ſolche durch einen Querſtrich, auf die Art, wie hier beygefügt zu ſehen, $\frac{49}{7}$ von der Zahl 49 abſondert. Von dieſem Fache zähle man hierauf ſieben Fächer, wie ſolche, mit Buchſtaben oder Zahlen beſetzt, neben einander liegen, weiter, und ſchreibe alsdenn in das nächſte ſiebende Fach, wenn ſolches eine ledige Zahl, und nicht, wie in dem gegenwärtigen Falle, einen Buchſtaben hat, die Zahl 7 wieder ein, und fahre ſo fort dieſe Zahl bis an die Gränze 999, in die leeren zugehörigen Fächer einzutragen. Die erſten Zahlen, unter welche die 7 angemerkt werden kann und muß, ſind hier 49, 77, 91, 119 ... die letzten ... 931, 959, 973. Auf dieſe Art hat man nun ſchon, in Abſicht auf die noch leeren Fächer, die Tafel Cc aller von 1 bis 1000 durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, in eine andere, aller durch 2, 3, 5 und 7 nicht theilbaren Zahlen auf ſo weit, verwandelt, und die Primzahlen, die vorher nur bis mit 47 durch die Tafel gegeben waren, nun bis auf 113 zugleich mit gefunden. Es kommt alſo nur noch darauf an, dieſe Tafel in eine der durch 2, 3, 5, 7 und 11, und nach dieſen in eine der durch 2, 3, 5, 7, 11 und 13 — und endlich in eine der durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 1000 zu verwandeln, welches geſchehen wird, wenn man mit den Primzahlen 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, nach ihrer Ordnung, eben ſo, wie mit der Zahl 7, verfährt, jede dieſer Zahlen zuerſt in die Fächer ihrer Quadratzahl einſchreibt, von da an ſo viel unmittelbar neben einander liegende Fächer, als die Zahl Einheiten hat abzählt oder abmißt, die Zahl ſelbſt aber, wenn das jedesmalige letzte von den ſo abgezählten Fächern, nicht ſchon

mit einem Buchſtaben, oder einer bereits vorher eingetragenen kleinern Zahl beſetzt iſt, weiter fort einſchreibt, und auf dieſe Art bis zu Ende fortfährt.

Für diejenigen, welche von der auſſerordentlichen Leichtigkeit und Geſchwindigkeit einer ſolchen Arbeit, ſich ſelbſt durch einen Verſuch überzeigen wollen, (welches gewiß Niemanden gereuen wird, der ſich etwas genauer mit dieſer Methode bekannt zu machen wünſcht,) wird beyfolgende kurze Nachricht nicht unangenehm ſeyn, und ihnen gleichſam zu einem ſichern Leitfaden auf einem noch nicht ganz bekannten Wege dienen können. Der Factor

11	fängt an bey	121	hört auf mit	979	berichtigt die Primzahlen bis	167
13	= = =	169	= = =	949	= = =	283
17	= = =	289	= = =	901	= = =	359
19	= = =	361	= = =	893	= = =	523
23	= = =	529	= = =	989	= = =	839
29	= = =	841	= = =	899	= = =	953
31	= = =	961	= = =	961	= = =	997

und obgleich der letzte Factor 31, wie im Vorhergehenden gezeigt worden, die Primzahlen genau bis an 1369 berichtigen kann: ſo darf man doch hier, weil kein Factor über 1000 hinaus durch die Tafel durchgearbeitet worden, die Primzahlen auch nicht weiter als bis dahin bearbeitet erwarten.

Der von den Diviſoren 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, als kleinſten Factoren, beſetzten Fächer, der theilbaren Zahlen, von 1 bis 1000, ſind hier in allem 100; der ledigen Fächer hingegen für die Primzahlen, 168, mit Einſchlieſſung der mit Buchſtaben beſetzten beyden Primfächer der Zahlen 3 und 5, und mit Ausſchlieſſung der hier gar nicht befindlichen Singularzahl 2. Beyderley Zahlen liegen hier, ohne Nachtheil der Deutlichkeit, in der freundſchaftlichſten Unordnung, vermiſcht untereinander. Sie zu finden braucht man von den 268 Zahlen, nur allein die 100 theilbaren, auf vorbeſchriebene ſehr leichte Art, zu ſuchen: ſo bleiben alsdenn,

vermit-

vermittelſt der getroffenen ſo bequemen Einrichtung, die Primzahlen in den leeren Fächern, neben den theilbaren Zahlen, inviolabel — iſolirt — auf dem Grunde ſitzen.

So leicht und bequem auch das Abzählen der jedesmaligen Factoren an ſich ſelbſt iſt, ſo wird man dennoch, wenn man die Arbeit, zu welcher itzt für das erſte Tauſend Anleitung gegeben worden, weit fortſetzen will, eine Erleichterung dafür, nicht allein wünſchen, ſondern auch dieſelbe, wenn ſich dabey die Hoffnung zeigt, das Geſuchte mit noch mehrerer Sicherheit und Zuverläßigkeit zu finden, begierig aufſuchen. Die Einrichtung ſelbſt giebt hierzu die beſte Gelegenheit und den wirkſamſten Vorſchub. Man leimt nehmlich eine von den hier gelieferten Colonnen auf ein etwas ſtarkes Papier, oder auf eine dünne aber gut geſchlagene Pappe (ich bediene mich hierzu, wegen des ſo auſſerordentlich groſſen Umfangs meiner Arbeit, dünner, verzinnter, in der Dauer und Haltbarkeit die Pappe weit übertreffender Eiſenbleche) und ſchneidet alsdenn die Fächer für den zugehörigen Factor, ſo wie ſolche ſich in ihrer Ordnung ununterbrochen nach einander durch Abzählen ergeben, an den gehörigen Stellen, mit Beobachtung des nöthigen Spielraums für das Einſchreiben, aus, wobey man, der Ordnung wegen, bey dem Quadratfache des Factors anfangen kann. Solcher Patronen können jedem Liebhaber fünf, für die Zahlen 7, 11, 13, 17, 19, die mit den gleichnamigen römiſchen Zahlen bezeichnet ſind, als eine Anweiſung, wie man für andere Zahlen dabey verfahren könne, auf Verlangen abgeliefert werden, und hat ihr Gebrauch in der Anwendung nicht die geringſte Schwürigkeit. Man lege, um ein Beyſpiel zu geben, das oberſte Fach der Patrone VII auf das Fach der Quadratzahl von 7, d. i. auf das Fach 0 Hundert und 49, längſt der Colonne, ſo daß die Patrone die Colonne, die Colonne die Patrone, ſo weit eins gegen das andere zureicht, deckt: ſo wird man, ohne alles Abzählen, den Factor 7 durch die

offenen Stellen der Patrone, in die ledigen Fächer der Colonne, mit gröſster Geſchwindigkeit und Sicherheit einſchreiben können. Anfang und Ende der Patrone paſst genau an ihren entgegengeſetzten Gränzen aneinander, ſo, daſs man an denſelben Queerſtrich der Colonne, wo das Ende der Patrone ausgeht, ihren Anfang nur von neuem anſetzen darf, um, durch Wiederholung der in die Patrone gebrachten Perioden für den zugehörigen Factor, ſo weit zu gehen als man nur will. Für die Fälle, wo die Patrone über die Colonne hinaus reicht, legt man die Queerlinie der Patrone, welche die Endlinie der Colonne deckt, auf die oberſte Einfaſſung der zunächſt folgenden Colonne, wodurch man die erſtere auf die letztere gleichſam aufſetzt. Was hier von der Patrone VII geſagt worden iſt, gilt, mit gehöriger Anwendung, auch für die Patronen XI, XIII, und für alle übrigen. Parallaxen, welche zu vermeiden die Aſtronomen, bey ihren Inſtrumenten mit Noniuseintheilungen, ſo ſehr beſorgt ſind, ſind hier nicht zu befürchten; und obgleich die Linien einander nicht allemal, wie ſie nach geometriſcher Schärfe ſollten, genau decken: ſo kann doch dieſe ſo ganz unbeträchtliche Abweichung, da ſolche nie zu der Höhe oder Breite eines Faches anwachſen, auch das Fach nicht einmal mit einer anſcheinenden Zweydeutigkeit anzeigen kann, nie zu einem Fehler Anlaſs geben.

Solcher Patronen könnte man leicht noch mehrere, für andere Factoren, ausſchneiden; ich will aber, Zeit und Mühe zu erſparen, ein Mittel vorſchlagen, wie man die groſſe Anzahl dieſer Patronen auf eine einzige herunter ſetzen kann, welche ich die bewegliche Diſtanzenſcale nennen will, ob man ihr gleich den ſtolzen Namen einer Patrone aller Patronen mit Recht beylegen könnte. Die ganze Vorrichtung beſteht, wie *Fig.* I. zeigt, in einem hölzernen Rähmen, in welchen man dünn geſägte, glatt gehobelte Bretterchen, von beſtimmter Gröſſe, nach Gefallen einlegen, ſolche in einer an den

den Seiten des Inſtruments angebrachten Nuth, hart über der Fläche des Papiers, bequem verſchieben, und durch die auf der obern Fläche des Rähmens befindlichen Schrauben unwandelbar befeſtigen kann. Jedes Brettchen hat unten einen geraumigen Ausſchnitt für die einzuſchreibende Zahl ihres Faches, und ſo kann man, wenn man die Stellen, in welchen ein gegebener Factor, ohne Ausnahme, ein Diviſor iſt, in den Fächern der Colonnen, ſo weit man mit der Diſtanzenſcale gehen will oder kann, gehörig anmerkt, die corrėſpondirenden Bretterchen (die hier durchgehends für den Factor 23 geordnet ſind) jedesmal an den rechten Ort, gerade über den Fächern der unter dem Inſtrumente liegenden Colonne, einlegen und befeſtigen, ohne daß man nöthig hätte einen Maaßſtab an dem Inſtrumente anzubringen, der das Einſetzen der Bretterchen nach ihm, nur erſchweren, und ſelbſt das Inſtrument unnöthigerweiſe theuerer machen würde. Zu beyden Seiten des Inſtruments ſind ſenkrecht aufſtehende Flügel angebracht, die ſich nach Gefallen aufwärts und unterwärts verſchieben laſſen, damit man, wo die Colonnen innerhalb des Inſtruments aufhören, bequem an den Seiten anmerken, und auf ſolche Weiſe eine Colonne mit der andern verbinden, die vorhergehenden über die folgenden aufſetzen könne. Für diejenigen Fälle, wo das Inſtrument in den Colonnen aufhört, iſt durch die, über die ausgeſchnittenen Fächer der Einſetzebretterchen beygefügten römiſchen Zahlen, hinlänglich geſorgt worden, indem ſolche ſich wechſelſeitig auf einander beziehen, und dadurch bey Fortſetzung der Arbeit zu beſtändigen Wegweiſern dienen. Noch iſt kürzlich zu erinnern, daß diejenigen Bretterchen, deren ausgeſchnittene Fächer in die 3te oder 8te Verticalreihe der Colonnen fallen, hier mit gutem Vorbedachte, auf eine in die Augen fallende Weiſe, von andern Holze gearbeitet worden ſind, als die übrigen, damit man ſelbige, wenn man ſie nicht gar weglaſſen will, (weil in dieſen Reihen, de-

ren Zahlen ſich durchgängig in 5 endigen, nie ein Factor eingeſchrieben wird,) bey der Arbeit ſelbſt ſogleich übergehen könne. Jedem Einſetzebrettchen hat man, der Haltbarkeit wegen, die Höhe von wenigſtens zwo Horizontalreihen der Tafel geben müſſen, wobey man alles ſo veranſtaltet hat, daß eben die Bretterchen, die in dem Inſtrumente für den Factor 23 geordnet ſind, auch für jeden andern gröſſern Factor gebraucht werden können; denn für die kleinern Factoren 7, 11, 13, 17 und 19, bedient man ſich lieber der Individualpatronen für dieſe Zahlen, da man die Einſetzebretterchen für ſie, in den meiſten Fällen, ganz ſpeciell einrichten, und oft zwey Fächer in ein Brettchen, auf entgegengeſetzten Seiten deſſelben, hätte bringen müſſen.

Mit gleicher Bequemlichkeit und Sicherheit, kann man ſich auch, beſonders bey ſehr groſſen Factoren, des *Fig.* 2. angegebenen Diſtanzenmeſſers bedienen, bey welchem ſich das obere Oehr, das im Lichten gerade die Gröſſe eines Faches hat, ſo wie der darunter befindliche Schieber, auf und niederwärts bewegen laſſen. Unten iſt ein Queerholz, mit zwo geraumigen Oeffnungen für die einzuſchreibenden Zahlen, welches ſich nach der Rechten und Linken, wie es die Umſtände erfordern, verſchieben, und durch die beyden Bolzen zur Seite, mit dem ſenkrecht aufſtehenden Stabe, in welchem ſich der bewegliche Schieber befindet, verbinden, und daran befeſtigen läßt. Die beyden Oeffnungen des Queerbalkens, von welchen die zur Rechten um eine Reihe höher liegt, als die zur Linken, ſind von einander genau um zehn Fächer entfernt, daß alſo niemals mehr als ein Fach auf einmal, in der Mitte der Oeffnung, ſichtbar ſich darſtellen, und folglich nie eine Zweydeutigkeit für das Einſchreiben entſtehen kann. Auch giebt es hier, da in den ledigen Fächern der Tafel Cc nur die vier Endzahlen 1, 3, 7, 9, keine andern, vorkommen, in allem nur vier Veränderungen, die man ſogleich bey dem Inſtrumente anbringen kann,

ſobald

ſobald man nur, nach Anleitung der auf dem Queerbalken befindlichen Zahlen, den Mittelſtrich des obern Stabes, in welchem die beyden Läufer gehen, gerade über den zugehörigen Strich des Queerholzes aufſetzet.

Geſetzt, man wollte das Inſtrument für die Diſtanz 101 ſtellen: ſo ſchiebe man die auf dem Queerbalken befindliche, um eine Reihe höher liegende, Oeffnung, ſo weit rechter Hand heraus, bis der erſte Strich des untern Theiles, wo 1 zur Rechten und 9 zur Linken ſteht, genau an den Mittelſtrich des obern Theils des Inſtruments anpaßt, und verbinde beyde Theile durch die Bolzen feſt mit einander. Hierauf nehme man zwey auf der Tafel um 101 von einander entfernte Fächer, lege das Oehr des ſenkrecht auf dem Queerholze aufſtehenden Stabes, auf das oberſte von beyden Fächern, und verſchiebe das Inſtrument an dieſem beweglichen Oehre, auf oder niederwärts, längſt der Verticalreihe, in welcher dieſes erſte Fach befindlich iſt, bis das andere, rechter Hand dem erſten liegende Fach, gerade in die Mitte der auf dem Queerbalken rechter Hand befindlichen obern Oeffnung zu ſtehen kömmt. Man befeſtige alsdenn das bewegliche Oehr mit einer kleinen Klammer, oder auch mit einem ſchmalen aber ſtarken, mit Mundleim überſtrichenen Stückchen Papier, oder auch, nach Beſchaffenheit der Umſtände, nur mit Wachs, ſo hat man die geforderte Diſtanz auf dem Inſtrumente genau, und ohne Gefahr, daß ſich ſolche verrücken könne. Andere, zunächſt gröſſere oder kleinere Diſtanzen, braucht man nicht von neuem unmittelbar zu ſuchen, ſondern man kann ſelbige aus dieſer, ſogleich mittelbar finden. Denn, zieht man den Queerbalken weiter nach der Rechten heraus, bis an den nächſtfolgenden Strich, bey welchem rechter Hand 3, linker Hand 7 ſtehet; ſo hat man die Diſtanz 103 geſtellt; der nächſte Strich nach dieſem giebt 107; der letzte 109; rückt man aber von da an, das bewegliche Oehr z. E. um zween Zehner herunter oder

um drey Zehner hinauf: ſo hat man dadurch die Primzahlen 89 oder 139 geſtellt.

Von dem Gebrauche dieſes Diſtanzenmeſſers iſt weiter nichts zu erinnern. Es fällt in die Augen, daß man durch ihn nur immer eine Zahl auf einmal finden und eintragen, und die Operation dafür ſo weit und ſo oft wiederholen kann, als man nur will. Der mittlere Schieber hat gleiche Abſicht mit den Seitenflügeln der beweglichen Diſtanzenſcale: durch ihn werden hier einzelne Verticalreihen, wie dort ganze Colonnen, übereinander geſetzt, und die unter- und übergeſchriebenen kleinen Ordnungszahlen dieſer Reihen dienen dazu, daß das mit Leichtigkeit und ohne Verwirrung geſchehen könne; auch wird eine kleine Aufmerkſamkeit bey beyden Inſtrumenten, wenn man irgend etwa, bey der Einrichtung oder bey dem Gebrauche derſelben, einen Fehler begangen hätte, dieſen Fehler alsbald durch einen Widerſpruch zu erkennen geben, wenn man zugleich auf die ununterbrochene ewige Wiederkehr der Endzahlen 1, 3, 5, 7, 9, welche in den hinter einander liegenden Producten der Tafel nach und nach vorkommen, ſo wie man den auf dem Inſtrumente geſtellten Factor gehörigen Orts einträgt, neben her mit Achtung giebt.

Wer ſich nicht zutrauet, eine und eben dieſelbe Zahl, wie hier bey Aufſuchung der theilbaren Zahlen nothwendig iſt, vielemal hintereinander in die zugehörigen Fächer, ohne ein Verſehen dabey in der Zahl zu begehen, einzuſchreiben: (denn die Aufmerkſamkeit hört insgemein da am erſten auf, wo bey einer Sache wenig oder nichts zu denken übrig bleibt) dem kann man, zu noch mehrerer Sicherheit, folgendes Mittel vorſchlagen, das für gewiſſe zuſammengeſetztere Fälle faſt unentbehrlich wird.

Man laſſe einen hölzernen Griff nach *Fig.* 3. dergeſtalt vorrichten, daß man an ſeinem ſchmal zu laufenden Ende, metallene Ziffern, wie man ſolche bey den Schriftgieſſern findet,

findet, ohngefähr auf die Art, wie die Buchbinder mit den Buchſtaben und Ziffern in ihren Schrift- und Zahlenkaſten verfahren, mit den gehörigen Vorlagen, bequem einſetzen, und mit einer Schraube leicht und ſicher befeſtigen könne: ſo hat man für jede Zahl, die man ſich ſo geſetzet hat, einen perpetuirlichen unwandelbaren Stempel, bey deſſen gedankenloſer Aufdruckung man immer viel weniger einem Fehler ausgeſetzt iſt, als bey dem vorſichtigern Gebrauche der freyern, nur gemeſſenen Befehlen folgendem Feder. Das Tintenfaß verwandelt ſich hierbey in einen mit ſchlechter Tuſche oder Tinte, die aber beyde etwas ſtark ſeyn müſſen, hinlänglich getränkten Filz, oder auch in ein mit Buchdruckerfarbe wohl ab- und eingeriebenes Leder; und man wird wohl thun, da man doch nicht bey Jedem die hierzu nöthigen Setzer- und Druckertalente vorausſetzen kann, wenn man anfänglich, ehe man noch mit dem Stempel in die Tafel ſelbſt hineingehet, ſich zuvor einige Abzüge zur Reviſion, und nach Gelegenheit daraus erfolgenden Correctur, ausſetzet.

Beyde vorherbeſchriebene Werkzeuge, ſind eben ſo wenig nur allein auf dieſe Zahlen, als auf die Gröſſe eingeſchränkt, in welcher ſie hier geliefert werden. Man kann ſie zu Aufſuchung anderer Zahlen leicht modificiren, auch ſelbige mit Vortheil verlängern laſſen, und es giebt hier, wie in andern Fällen, ein Maximum, das ſich z. E. für die Diſtanzenſcale, aus dem Producte der Bequemlichkeit des Gebrauches in die Menge der durch ſie auf einmal zu findenden Factoren, beſtimmen lieſſe; wiewohl auch hierbey zufällige Umſtände der Perſonen, Zeiten und Oerter mit in Betrachtung kommen. In gleicher Abſicht (ich rede hier nicht von Verſuchen, ſondern von ernſtlichen, weitausſehenden Arbeiten) kann man ſich auch mehrerer von dieſen Inſtrumenten zugleich bedienen, und die Ordnung ihres Gebrauchs bey der Arbeit, durch anzuſchreibende Numern bequem erleich-

leichtern. Gleichwohl aber hat man die Vortheile, die ſich bey einer ſolchen Arbeit anbringen laſſen, nicht ſchlechterdings, und nur ganz allein, von dieſen Inſtrumenten zu erwarten. Die getroffene Einrichtung giebt viel reichere Ausbeute, als man anfänglich von ihr wohl nicht wird erwartet haben. Die bequeme und geſchickte Vergleichung der Buchſtaben zur Seite und in den Fächern, der überſchriebenen gröſſern und kleinern Zahlen, der einzelnen Fächer und der darinn befindlichen Zahlen, mit ihren End- und Anfangsziffern, der horizontalen, verticalen und diagonalen Reihen, der ganzen Colonnen, Seiten und Bogen — einzeln und in Verbindung mit einander, giebt hier für gewiſſe Factoren vortheilhafte Ausſichten, wohin ſelbſt der bequeme und ſichere Gebrauch dieſer Inſtrumente ſo geſchwind nicht führen kann. Man wird nicht von mir erwarten, daß ich das alles weitläuftig hier auseinander ſetzen ſoll. Dem Denker iſt ein einziger Wink genug; dem Nichtdenker würde ſelbſt die umſtändlichſte Vorzählung aller einzelnen Fälle, aus den möglichen Combinationen, doch immer weit eher Anleitung zu Verwirrung, als wirkliche Hülfe ſeyn.

So wie ſich die hier bekannt gemachten Vortheile einzig und allein auf die, aus der Natur des gewöhnlichen Decimalſyſtems, in Verbindung mit den Eigenſchaften der zu ſuchenden Zahlen, hergeleitete Anordnung der Zahlen gründen: ſo iſt kein Zweifel, daß man nicht, bey noch näherer Unterſuchung dieſes Syſtems, und bey den für die einzelnen Factoren oder Zahlen genau zu beſtimmenden periodiſchen Umläufen, noch verſchiedene Schritte, mit dem glücklichſtem Erfolge, weiter gehen könne. Dieſes hat man auch bey denjenigen Bogen, nach welchen man die verſprochene Factorentafel bearbeitet, zu thun keinesweges vergeſſen, um ſo mehr, da man ſich dadurch die Aufſuchung von mehr als 60000 Diviſoren für jede Million, erſparen konnte. Die Art und Weiſe, wie ſolches am füglichſten hat geſchehen und eingerich-

gerichtet werden können, hier umſtändlich anzuzeigen, würde ganz ohne Nutzen ſeyn, da hierzu eine weit umfänglichere, dennoch aber mit möglichſter Oekonomie betriebene, Veranſtaltung, als in der Beylage Cc zu geben möglich geweſen iſt, hat getroffen werden müſſen, die ganz speciell für die theilbaren und untheilbaren Zahlen gehört, und ohne deren Mittheilung, die Beſchreibung mangelhaft, ſelbſt hier und da unverſtändlich ſeyn würde. Man kann aber auch die Vorlegung einer ſolchen ganz ſpeciellen Einrichtung, zum öffentlichen Gebrauche, um ſo leichter entbehren, da ſich nicht vorausſetzen läßt, daß irgend Jemand, dem es bekannt iſt, was in dem ſüdlichen und nördlichen Theile von Teutſchland für dieſe Zahlen geſchiehet, die Bearbeitung derſelben im Ernſte vorzunehmen, und dadurch das gewonnene Land ihren erſten Eroberern gleichſam ſtreitig zu machen, oder an dem Beſitze mit Antheil zu nehmen, ſich könne einfallen laſſen, bevor ſie ſelbiges nicht entweder ſelbſt freywillig verlaſſen, oder durch Vertrag an Andere abtreten. Inzwiſchen hat man doch nicht ermangelt, auch dieſe ganz ſpeciellen Vortheile, Kennern vom erſten Range zum Erſehen und zur Beurtheilung vorzulegen.

So weit von der Art und Weiſe, wie man die kleinſten Diviſoren der theilbaren Zahlen, nebſt den Primzahlen, leicht und bequem finden könne. Die geſuchten Zahlen erſcheinen hier immer in ihrer natürlichſten Folge neben und hinter einander, und es gehört mit zu den weſentlichſten Vortheilen dieſer Berechnungsart, daß, ſo wie man das Ganze, durch bloſſes Aneinanderlegen der einzelnen gedruckten Bogen, bis auf jede verlangte Gränze ausdehnen und erweitern kann, man auch die zu ſuchenden Zahlen, ohne eine weitere, oft mühſame, oft auch koſtbare, Einrichtung für das Einſchreiben derſelben treffen zu dürfen, ſo wie man ſie findet, zugleich in die gehörigen Stellen eintragen, und dadurch, vermittelſt in die Augen fallender Proben,

aus

aus den einzelnen Endzahlen ꝛc. Fehler leicht vermeiden, oder wo ja dergleichen, aus Unachtſamkeit begangen worden, ihnen bequem nachgehen und ſie verbeſſern kann. Nun wird es Zeit ſeyn, die Vortheile dieſer Methode weiter zu entwickeln, und ſie auf andere, mit den bereits geſuchten nahe oder weitläufig oder auch gar nicht verwandte Zahlen, zu erſtrecken.

III.

Anwendung der Methode bey Aufſuchung aller Factoren der theilbaren Zahlen. Erfindung ſolcher Zahlen, die durch eine gegebene Zahl dividirt, einen geforderten Reſt laſſen. Aufſuchung der Zahlen von der Form $2^m. 3^n. 5^p. 7^q$... Nutzen der Methode bey Verbindung gegebener Zahlen.

Man kann bey Aufſuchung aller Factoren der theilbaren Zahlen verſchiedene Wege gehen. Ich will den kürzeſten hier anzeigen, und in einem Beyſpiele zugleich die Anwendung auf die Theiler aller Zahlen von 1 bis 100, die durch 2, 3, 5 theilbaren nicht davon ausgeſchloſſen, mit beybringen.

Die Quadratwurzel von 100 iſt 10. Man braucht alſo zu den erſten Hauptdiviſoren nur die Primzahlen bis an die Zahl 10 d. i. die Zahlen 2, 3, 5, 7. Davon geben die erſten drey, wenn ſie gehörig bis an 100 ſind durchgearbeitet worden, die Primzahlen nach ihrer Ordnung, bis an die Zahl $7^2 = 49$ d. i. die Zahlen 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, welche ich die zwoten, oder die Nebendiviſoren nennen will. Die Urſache dieſer Benennung gründet ſich darauf, daß von den erſtern nicht nur die Zahlen ſelbſt, ſondern auch verſchiedene ihrer Potenzen, vorkommen können, welches bey den letztern nicht ſtatt hat, und daß dieſe letztern, aus den erſtern, durch eine nothwendige Folge, beſtimmt werden. Man mache alſo von den Zahlen 2, 3, 5,

7, alle

7, alle Potenzen nach einander, bis an die, welche zunächſt gröſſer ſeyn würden als 100. Dieſe ſind nach ihrer Ordnung $2=2$; $2^2=4$; $2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$; $2^6=64$; ferner $3=3$; $3^2=9$; $3^3=27$; $3^4=81$; ingleichen $5=5$; $5^2=25$; und endlich $7=7$; $7^2=49$. Hierauf gehe man mit der höchſten Potenz der niedrigſten Zahl, d. i. mit 2^6, zuerſt in die Tafel A, ſchreibe dieſe Potenz in das zugehörige, durch ihren Werth beſtimmte, Fach von 0 Hundert ein, und fahre fort, wenn, und ſo lange ſolche die feſtgeſetzte Gränze nicht überſteigen, die Vielfachen aus dieſem Werthe, auf vorherbeſchriebene Art, durch Einſchreiben derſelben Potenz, in der Tafel anzumerken. Eben das muß auch mit den zunächſt niedrigern Potenzen derſelben Zahl, ſo wie mit den Potenzen der unmittelbar folgenden gröſſern Zahlen, bey denen man gleichfalls jedesmal von der höchſten anfängt, geſchehen, bis man mit allen Hauptdiviſoren und ihren Potenzen durch iſt; wobey nichts weiter zu erinnern übrig bleibt, als daß man niedrigere Potenzen in den Feldern, die bereits mit höhern Potenzen eben derſelben Zahl beſetzt ſind, mit Uebergehung dieſer Fächer, nicht einſchreibt. So kommt z. E. die Potenz 2^6 in das, durch ihren Werth beſtimmte, Fach von 64 zuerſt zu ſtehen, und kann man mit dieſem Factor, da ſein Doppeltes d. i. 128, die Gränze 100 ſchon überſteigen würde, nicht weiter gehen. Man trage alſo nunmehr 2^5 in das Fach 32 ein; das Doppelte hiervon, oder 64, iſt ſchon mit 2^6, einer gröſſern Potenz, derſelben Zahl 2, beſetzt, und ſo wird denn 2^5 in das zunächſt von 64, um 32 entfernt liegende, der Zahl 96 zugehörige Feld, eingeſchrieben. Auf gleiche Art verfährt man mit den übrigen Potenzen dieſes und der andern Hauptdiviſoren.

Man hat alſo nunmehr, in Abſicht auf die noch leeren Felder, eine bis auf 100 gehende Tafel aller durch 2, 3, 5, 7 nicht theilbaren Zahlen, in welcher die Primzahlen bis mit 97, als Nebendiviſoren, vollkommen berichtiget ſind. Dieſe

Neben-

Nebendiviſoren bis mit 47 ſchreibe man, von ihren Doppelten an gerechnet, in die zugehörigen Felder der Tafel, nach und nach ein: ſo wird man die Primzahlen in den leeren Fächern, und neben ihnen die theilbaren Zahlen, ſo wie auch alle Factoren der letztern, in ihrer natürlichſten Folge, wie in dem beygefügten Diagrammate mit mehrerm zu erſehen, bis auf 100 geordnet finden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	00 * * *	01	02	03	04 2^2	05	06 2.3	07	08 2^3	09 3^2
	10 2.5	11	12 $2^2.3$	13	14 2.7	15 3.5	16 2^4	17	18 2.3^2	19
	20 $2^2.5$	21 3.7	22 2.11	23	24 $2^3.3$	25 5^2	26 2.13	27 3^3	28 $2^2.7$	29
	30 2.3.5	31	32 2^5	33 3.11	34 2.17	35 5.7	36 $2^2.3^2$	37	38 2.19	39 3.13
	40 $2^3.5$	41	42 2.3.7	43	44 $2^2.11$	45 $3^2.5$	46 2.23	47	48 $2^4.3$	49 7^2
A	50 2.5^2	51 3.17	52 $2^2.13$	53	54 2.3^3	55 5.11	56 $2^3.7$	57 3.19	58 2.29	59
	60 $2^2.3.5$	61	62 2.31	63 $3^2.7$	64 2^6	65 5.13	66 2.3.11	67	68 $2^2.17$	69 3.23
	70 2.5.7	71	72 $2^3.3^2$	73	74 2.37	75 3.5^2	76 $2^2.19$	77 7.11	78 2.3.13	79
	80 $2^4.5$	81 3^4	82 2.41	83	84 $2^2.3.7$	85 5.17	86 2.43	87 3.29	88 $2^3.11$	89
	90 $2.3^2.5$	91 7.13	92 $2^2.23$	93 3.31	94 2.47	95 5.19	96 $2^5.3$	97	98 2.7^2	99 $3^2.11$
1	00 $2^2.5^2$									

Man könnte auch alle einfache Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen, blos aus den Hauptdiviſoren 2, 3, 5, 7, und ihren Potenzen finden, ohne die Nebendiviſoren mit zu Hülfe zu nehmen, wenn man bey Einſchreibung der erſtern, die zugehörigen Ordnungszahlen überall mit beyfügte. Dieſe Ordnungszahlen ſind aber nicht ſelten zuſammengeſetzte Zahlen, und müßten, auf den Fall, erſt jedesmal in ihre einfachen Factoren aufgelöſet werden, welches die Arbeit in ihrem Fortgange oft unterbrechen, auch in der Folge beträchtlich erſchweren würde. Man thut alſo beſſer, man geht, wie gezeigt worden iſt, nach den Potenzen der Hauptdiviſoren fort, und holt die Nebendiviſoren, die, wie die erſtern, lauter Primzahlen ſind, bey der zwoten Bearbeitung gehörig nach. Es lieſſen ſich für die einzelnen Factoren auch Regeln angeben, wie man vermeiden könnte, daß man mit niedrigern Potenzen einer Zahl nicht auf ſolche Felder kömmt, die ſchon mit höhern Potenzen derſelben Zahl beſetzt ſind. Man findet ſie aber bey der Arbeit leicht ſelbſt, und folgt ihnen, wenn ihre Anwendung nicht zuviel Aufmerkſamkeit erfordert. So findet, um ein Beyſpiel zu geben, bey dem Einſchreiben der Potenzen von 2, folgendes, ſehr leicht zu beobachtendes, Geſetz ſtatt: Man trägt die höchſte Potenz 2^n in die gehörigen Felder ein; die nächſtfolgende Potenz 2^{n-1} ſetzt man, nach ihrem Werthe, zu der Zahl 2^{n-1}, und zu allen folgenden, die von einander um 2^n Fächer entfernt liegen. Die Potenz 2^{n-m} fängt alſo in dem Fache der Zahl 2^{n-m} an, und wird von da an, nach den Diſtanzen 2^{n-m+1} weiter fort eingeſchrieben.

Das, was bisher von dieſer Methode, in Rückſicht auf eine dadurch zu fertigende Prim- und Factorentafel gezeigt worden iſt, läßt ſich überhaupt, auf die Erfindung jeder Zahl anwenden, welche durch eine gegebene Zahl dividirt, ganz aufgehet. Man kann aber auch, auf eben dem Wege,

 mit

mit gleicher Leichtigkeit, eine ganze Reihe von Zahlen finden, welche, durch eine gegebene Zahl getheilt, einen verlangten Reſt übrig laſſen.

Geſetzt, man brauchte die Zahlen, die durch 41 dividirt, 29 zum Reſte laſſen: ſo zähle man, in der Tafel A, von 29 an, ſo vielmal 41 Fächer nach einander ab, als die vorhabende Abſicht erfordert, ſo erhält man die Zahlen 29, 70, 111, 152, 193, 234, 275, 316, 357, 398, 439 ꝛc. deren Quotienten nach der Ordnung der natürlichen Zahlen von 0 an fortgehen, und bey denen der Reſt durchgehends 29 iſt. Soll dieſer Reſt von 29 an, nach gegebenen Zahlen anwachſen oder ſich vermindern: ſo kann man die hierzu nöthigen Zahlen, entweder aus den bereits gefundenen ſogleich machen, oder gleich anfangs das Abzählen dahin modificiren. Wie ſich dergleichen Zahlen auch aus den Tafeln B und C finden lieſſen, iſt hier nicht nöthig umſtändlich zu zeigen, da die Tafel A zu dieſer Abſicht ganz allgemein nützlich iſt, die andern beyden aber nur in gewiſſen beſondern Fällen brauchbar seyn würden, wenn man etwa nur die geraden oder nur die ungeraden von dieſen Zahlen, ausſchlieſſungsweiſe zu wiſſen verlangte.

Ein Beyſpiel will ich doch hier beyfügen, aus welchem man zugleich den Nutzen erſehen wird, den die Aufſuchung ſolcher Zahlen, die einen verlangten Reſt nach der Diviſion übrig laſſen, ſelbſt für die theilbaren Zahlen gewähret; der Vortheile, die dergleichen Zahlen in der unbeſtimmten Analytik, bey den ſo genannten diophantiſchen Aufgaben, haben können, nicht zu gedenken.

Sucht man die Zahlen, welche durch 8 dividirt, 1 zum Reſte laſſen: ſo findet man ſelbige aus der Tafel A, von 1 an, in folgender Ordnung 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 89, 97, 105, 113, 121.... nach einander. Dieſe Zahlen ſind durchgängig ungerade Zahlen, und enthalten zugleich, in den, von der erſten an, nach den natürlichen

lichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5... fortgehenden Entfernungen von einander, aller ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11... Quadrate 1, 9 25, 49, 81, 121... nach der Ordnung. Man könnte alſo auf dieſe Art die ungeraden Quadrate leicht finden, beſonders, wenn man dabey den Perioden von 200 mit Vortheil gebrauchte, und die Horizontalreihen in A von acht zu acht Zahlen ordnete, wodurch denn die Zahlen 8 n + 1 alle ſehr bequem in eine Verticalreihe unter einander fallen würden. Noch bequemer würde man dieſe Zahlen in der Tafel C der ungeraden Zahlen, nach der Diſtanz 4, mit Beobachtung und Anwendung des nur gedachten Vortheils auf dieſe Zahl, abzählen können. Eine Tafel, in welcher die Zahlen ſelbſt nach der Ordnung ber Progreſſion 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49... fortgiengen, wäre hierbey die kürzeſte und brauchbarſte, wenn man die Zahlen von fünff zu fünff, für den Perioden von 200 ordnete. Aus dem Vorhergehenden erhellet zugleich, daß die Formel 8 n + 1 die Reihe der ungeraden Quadrate giebt, ſo wie man ſtatt n die Trigonalzahlen 0, 1, 3, 6, 10, 15.. nach und nach ſubſtituirt.

Ehe ich die Anwendung der Methode auf die Theiler der zuſammengeſetzten Zahlen ganz verlaſſe, muß ich noch mit wenigem erinnern, daß man durch ſie, auch eine bereits berechnete Tafel leicht fortſetzen, das heißt, die Berechnung von jeder verlangten Gränze anfangen könne. Die Lambertiſche Tafel giebt die Theiler der Zahlen bis an die Zahl 102000. Wollte man ſie fortſetzen, ſo müßte man dieſe Gränze nach und nach durch alle Primzahlen von 7 an, dividiren; den Reſt aus der Diviſion von dem Diviſor abziehen, und dieſen neuen Reſt zu der Gränze addiren: die Summe hieraus, würde alsdenn jedesmal das Fach anzeigen, in welches der Diviſor zuerſt in der neuen Tafel eingetragen werden muß, wenn ſolches nicht ſchon durch eine der vorhergehenden kleinern Primzahlen beſetzt iſt. Für dieſen Fall, oder wenn die Summe eine gerade Zahl iſt, muß man

den Diviſor, mannichmal mehr als einmal, zu der gefun-
denen Zahl addiren, um dieſe Zahl in der Tafel C oder Cc
der ungeraden Zahlen, anmerken zu könuen. So findet man
$\frac{102000}{7} = 14571 + \frac{3}{7}$; $\frac{102000}{11} = 9272 + \frac{8}{11}$; $\frac{102000}{13} = 7846 + \frac{2}{13}$; und hieraus die Zahlen 102004; 102003; 102011; die ſich nach ihrer Ordnung durch 7, 11, 13 thei-
len laſſen. Von dieſen Zahlen iſt aber die erſte eine gerade,
die zwote eine bereits durch 3, die dritte ein ſchon durch 7
theilbare Zahl. Man addire alſo 7 zur erſten, 2.11=22
zur zwoten, und 2.13=26 zur dritten: ſo werden die Fächer
der Zahlen 102011; 102025; 102037 den einzuſchreiben-
den Primzahlen 7, 11, 13, zunächſt, und keinen andern
vorhergehenden, zugehören. Eben ſo verfährt man bey al-
len übrigen Diviſoren, für welche man die Gränze des Ab-
zählens in der fortzuſetzenden Tafel ſuchen muß.

Ich gehe nunmehr zu der Anwendung dieſer Methode
auf andere Zahlen fort, und will zuerſt die Aufſuchung der
Zahlen von der Form $2^m. 3^n. 5^p. 7^q...$ (Lamb. Zuſ. Taf.
17) anweiſen, bey denen das Verfahren, in genaueſter
Verbindung mit dem ſtehet, was im Vorhergehenden von
den theilbaren Zahlen überhaupt gezeigt worden iſt.

Dieſe Zahlen, ſo weit ihre Form hier angegeben wor-
den iſt, begreifen alle diejenigen unter ſich, welche ſich durch
2, 3, 5, 7, und nur durch dieſe, durch keine andere Zahl,
ohne Reſt theilen laſſen. Die Logarithmen dieſer Zahlen
laſſen ſich aus den Logarithmen ihrer ſehr kleinen einfachen
Factoren leicht berechnen, und in ſo fern ſind dieſe Zahlen
vor andern vorzüglich bequem.

An ſich, und auf dem gewöhnlichen Wege würde man
ſie, mit ihren Factoren, folgendergeſtalt finden können.
Man ſetzte die einzelnen Exponenten m, n, p, q... ihrer
einfachen Factoren, nach und nach den Zahlen 0, 1, 2, 3,

4, 5, 6... gleich, und machte nachher alle Verbindungen der daher entſtehenden Potenzzahlen, nach allen ihren auf vorbemeldete Art ſucceſſive determinirten Exponenten; ſo würden die ſo ineinander multiplicirten Potenzen, nach und nach die verlangten Zahlen, zugleich mit allen ihren Factoren, geben. Wer ſieht aber nicht ſogleich wie höchſtbeſchwerlich eine ſolche Arbeit ſeyn würde? Man ſuche daher dieſe Zahlen, weil bey ihnen gerade und ungerade Zahlen vermiſcht vorkommen, durch die Tafel A, und zwar

a) directe. Man mache nehmlich von allen einzelnen Factoren 2, 3, 5 und 7, nach und nach ihre Potenzen 1, 2, 3... ſo weit, als ſolche die Gränze, innerhalb welcher man dieſe Zahlen ſuchen will, nicht überſteigen. Die höchſten Potenzen der kleineren Zahlen trage man alsdenn, eben ſo wie vorher bey Aufſuchung aller Factoren der zuſammengeſetzten Zahlen gezeigt worden iſt, nach ihren Werthen und den daraus flieſſenden Diſtanzen, in die zugehörigen Felder der Tafel ein, und fahre ſo fort, die nächſt kleinern Potenzen derſelben Zahlen, ſo wie die Potenzen der übrigen, mit Uebergehung derjenigen Fächer, die bereits mit höhern Potenzen derſelben Zahl, deren niedrigere Potenz man einſchreiben ſoll, beſetzt ſind, in der Tafel anzumerken. Von den ſo beſchriebenen Fächern, behält man alsdenn nur diejenigen bey, deren Factoren in einander multiplicirt, die Zahl des Faches ganz geben, d. i. alle Verbindungen der Factoren und ihrer Potenzen, wie ſolche, nach und nach, in der Tafel zuerſt vorkommen, ſo daß man dabey die leeren Fächer, ſo wie diejenigen, in welchen in der Folge Verbindungen vorkommen, die bey vorhergehenden Zahlen ſchon da geweſen ſind, als unbrauchbare und für die gegenwärtige Abſicht unnütze Fächer übergeht; und ſo dient denn dieſes Verfahren auch Verbindungen gegebener Zahlen und ihrer Potenzen, deren Product in einander eine gegebene Gränze nie überſteigen ſoll, mechaniſch zu finden.

Auf dieſe Art ſtehen die Zahlen als Producte, mit ihren Potenzfactoren, in einem Fache beyſammen. Will man aber nur die Zahlen haben, ohne ihre Factoren zugleich mit anzumerken: ſo findet man ſolche noch leichter

b) indirecte oder ausſchlieſſungsweiſe; indem man die Fächer, in welche höhere Primzahlen (hier 11, 13, 17 u. ſ. w.) nach und nach beym Abzählen, als Factoren fallen, ausſtreicht, und nur die Zahlen der übriggebliebenen Felder beybehält. Man findet hierinn zugleich eine ſicherere Regel, nach welcher ſchon vorher da geweſene Verbindungen in a, bey den folgenden Stellen mechaniſch ausgeſchloſſen werden können. Auch zeigt ſich hier einiger Nutzen eines bloſſen Primzahlenverzeichniſſes; denn wenn man die Vielfachen der Primzahlen über 7, nach der Ordnung, ſo lange ſolche die feſtgeſetzte Gränze nicht überſteigen, machen wollte: ſo würde man dadurch directe alle Zahlen, die zu der Form $2^m. 3^n. 5^p. 7^q$ nicht gehören, alſo indirecte die verlangten Zahlen ſelbſt, finden können.

Die Zahlen dieſer Form, in ihrer Ordnung, bis an 200 ſind folgende:

1	7	15	25	36	50	70	90	112	140	168
2	8	16	27	40	54	72	96	120	144	175
3	9	18	28	42	56	75	98	125	147	180
4	10	20	30	45	60	80	100	126	150	189
5	12	21	32	48	63	81	105	128	160	192
6	14	24	35	49	64	84	108	135	162	196

Dieſer Zahlen werden in der Folge bey jedem Hunderte und Tauſende immer weniger, ſo daß es nicht einmal die Mühe lohnen würde, das Verzeichniß derſelben etwas weit, auch nur bis auf 100000 fortzuſetzen. Man würde dabey bis auf die Primzahl 313 fortgehen, und in den ſpätern Tauſenden oft alle Fächer ausſtreichen müſſen.

IV.

IV.

Allgemeine Bemerkung über die Potenzzahlen. Quadrat und Cubiczahlen. Allgemeinſter Begriff des geometriſchen und arithmetiſchen Gnomons. Anweiſung die Quadrate durch Addiren nach der Ordnung und ſprungweiſe zu finden. Anwendung der Methode auf Quadrat- und Pronicʒahlen Wie man dieſe und andere Zahlen mechaniſch und aus freyer Hand hintereinander ſchreiben könne. Cubiczahlen. Verſchiedene Arten ſie durch Addition zu finden. Mechaniſmus der Cubiczahlengnomons und ihre Abmeſſuug in der Tafel.

Von den Potenzzahlen überhaupt hat Herr von Schönberg in ſeiner im Jahre 1773 herausgegebenen Abhandlung von den Tangenten, Quadraturen und Rectificationen der Kegelſchnitte, S. 197 eine feine Bemerkung gemacht, die ich hier kürzlich mit beyfügen will.

Wenn man nehmlich die Pythagoriſche Tafel rechter Hand und unterwärts erweitert, fortſezt: ſo iſt klar, daß alle poſitive ganze Potenzen, der von Eins an in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, in den Quadratfächern der Tafel nach und nach vorkommen müſſen. Den untern, rechter Hand liegenden Eckpunct eines ſolchen kleinen quadratiſchen Faches, nenne man den Winkelpunct der eingeſchriebenen Zahl, ſo läßt ſich erweiſen, wenn man die oberſte Horizontallinie, oder auch die linker Hand liegende äuſſerſte Verticallinie zu Abſciſſen annimmt, und ihren Anfang in beyder Linien Durchſchnitte feſtſezt, daß alle Winkelpuncte der Quadratzahlen in einer geraden Linie; alle Winkelpuncte der Cubiczahlen in einer Apolloniſchen Parabel; alle Winkelpuncte der Biquadratzahlen in der erſten cubiſchen; alle Winkelpuncte der fünften Potenzzahlen in der erſten biquadratiſchen Parabel; u. ſ. w. liegen werden, dergeſtalt, daß jedesmal der Grad dieſer erſten Parabeln, die insgeſamt die Seite p eines ſo kleinen Quadratfachs zum gemeinſchaftlichen Parameter haben, um Eins kleiner ſeyn

 wird,

wird, als der Potenzialexponent der Zahlen, durch deren Winkelpuncte dieſe Parabeln ſtreichen; ſo, daß die Parabeln $y^n = p^{n-1}x$, den $(n+1)$ten Potenzen der natürlichen Zahlen zugehören. Für die Quadratzahlen wäre hier $n = 1$; alſo $y = x$ eine gerade Linie; für die Cubiczahlen wäre $n = 2$; und $y^2 = px$, oder $y^2 = x$, wenn man auch $p = 1$ ſetzt, eine Apolloniſche Parabel u. ſ. w.

Den Beweis dieſes Satzes kann man an dem angeführten Orte ſelbſt nachleſen. Ich will nur noch erinnern, daß dieſe Bemerkung, ob man gleich nach ihr die Potenzzahlen nie ſuchen wird, dennoch zu einer fruchtbaren Quelle vieler Unterſuchungen über die Zahlen werden kann, wenn man damit die Anmerkung verbindet, die der Herr von Schönberg damals, auf mein Erinnern, S. 198 beyfügte, daß man, ſo wie hier in Anſehung der Potenzzahlen mit den Vielfachen der natürlichen Zahlen in der Pythagoriſchen Tafel geſchehen iſt, auch andere Zahlen, die nach einem mit Abſicht gewählten Geſetze fortgehen, in Quadrate, Rechtecke, Triangel u. ſ. w. einſchreiben, und daraus gewiſſe geforderte Zahlen finden könne; wenn man nur, ſtatt der daſelbſt vorgeſchlagenen krummen Linien, das viel bequemere Abzählen oder Abmeſſen ſubſtituirt, oder die Zahlen gleich anfangs ſo zu ordnen trachtet, daß die zu ſuchenden Zahlen in eine gerade Linie hinter einander fallen. Beydes kann für einerley Zahlen auf verſchiedene Art geſchehen, wie man aus nachſtehendem Beyſpiele für die Quadratzahlen deutlich ſehen wird, bey denen man, zu Erſparung des Raums, nur die Zahlen, nicht aber ihre Fächer, hier hat eindrucken laſſen.

	1	1
	3, 4	2, 4
	7, 8, 9	3, 6, 9
A	13, 14, 15, 16	4, 8, 12, 16	B
	21, 22, 23, 24, 25	5, 10, 15, 20, 25
	31, 32, 33, 34, 35, 36	6, 12, 18, 24, 30, 36
	43, 44, 45, 46, 47, 48, 49	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49
	57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64
	73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81	9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81
	91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,
2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98,
5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96,
10, 19, 30, 43, 58, 75, 94,
17, 28, 41, 56, 73, 92,
26, 39, 54, 71, 90,
37, 52, 69, 88,
50, 67, 86,
65, 84,
82,
C

Hier ſtellen A, B, C drey ganz verſchiedene, in triangulärer Form verſchiedentlich geſtellte Zahlenordnungen vor, bey denen insgeſamt die Quadratzahlen an einer Seite, neben einander liegen. So iſt A eigentlich die natürliche Reihe der Zahlen von 1 bis 100, bey welcher man aber, um kein Fach dieſer Form leer zu laſſen, oder mit mehr als einer Zahl zu beſetzen, die vordern Zahlen der Horizontalreihen abgekürzt, und z. E. bey der zwoten die Zahl 2, bey der dritten die Zahlen 5, 6, bey der vierten die Zahlen 10, 11, 12 u. ſ. w. weggelaſſen hat, und kann man die längſt der Hypotenuſe fortgehenden Anfangszahlen 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91 dieſer Reihen, bloß durch ſucceſſive Addition der in ihrer Ordnung fortgehenden geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, zu den vorhergehenden Anfangszahlen, von 1 an, leicht finden. In B liegen die

 natür=

natürlichen Zahlen, von 1 bis 10, in einer Vertical-Reihe, wie in der Pythagoriſchen Tafel, unter einander; jede dieſer Zahlen iſt das erſte Glied, und zugleich auch die Differenz einer nach horizontaler Richtung fortgehenden arithmetiſchen Progreßion, deren Gliederzahl dieſer Differenz durchgehends gleich iſt. Die Seitenzahlen 1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82 in C, entſtehen aus ſucceßiver Addition, der, in ihrer Ordnung fortgehenden ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, zu den Anfangszahlen, von 1 an, wie die gleichnahmigen Hülfszahlen in A, aus den geraden Zahlen, und ſteigen durchgehends in arithmetiſcher Progreſſion, von dem Unterſchiede 2, rechter Hand ſeitwärts bis zu den Quadratzahlen hinauf. Auf ſolche Art erſcheinen bey A die Quadrate in einer verticalen, bey B in einer diagonalen, bey C in einer horizontalen Lage neben einander. Vorzüglich charakteriſtiſch iſt der Pythagoriſche Triangel B. Die arithmetiſche Fundamentalprogreßion des Decimalſyſtems liegt auf ſeiner Baſis; die Reihe der, in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, in dem aufſtehenden Perpendikel; die Quadrate dieſer Zahlen fallen längſt der Hypotenuſe, den zugehörigen Wurzeln gegenüber, und haben die verwandten Proniczahlen 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90... gleich neben ſich zur Seite; und ſo kann man auch ſtuffenweiſe, von 1 herunter, zu den Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45... hinaufſteigen.

Man ſieht, ohne meine Erinnerung, von ſelbſt ein, daß ſich die Ordnung der Zahlen, zu Erfindung der Quadrate, ſo wie für andere Zahlen, auf noch viel mannichfaltigere Art als hier gezeigt hat werden können, verändern läßt. Man hat auch den Vortheil einer ſolchen Anordnung nicht ganz verkannt, indem Beyſpiele davon, hier und da, in den etwas ältern arithmetiſchen Schriften vorkommen, von denen die Pythagoriſche Tafel, und die bey unſern Vorfahren ſo ſehr berühmt geweſene Tabula mirifica der figurirten Zahlen

am

am meiſten bekannt ſind. Nur eine einzige, aber ſehr erhebliche Schwürigkeit, findet ſich auf dieſem Wege, die ſchon allein hat hinreichend ſeyn müſſen, ihn zu verlaſſen, ſo bald man die Hoffnung aufgegeben hat, ihn durch Ausbeſſerung gangbar zu machen. Die Hülfszahlen nehmlich, durch welche man die geforderten Zahlen ſuchen muß, wachſen hier bey jedem Schritte an Menge und Größe, und dehnen gar bald, ohne die Arbeit ſelbſt beträchtlich zu fördern, die Figur in eine ungeheure und unüberſehbare Fläche aus. Beſonders iſt die trianguläre Form dieſer Unbequemlichkeit ausgeſetzt; und es iſt bey ihr nicht leicht möglich, das Ganze aus ſeinen Theilen, auf eine ſchickliche und brauchbare Art zuſammenzuſetzen Vor allen hat, in dieſer Rückſicht, wohl unſtreitig die rectanguläre Geſtalt den Vorzug, beſonders, wenn man die Vortheile des Decimalſyſtems, ſo genau, als es nur immer möglich iſt, ohngefähr auf die Art, wie ich bereits gezeigt habe, mit ihr verbindet, und wenn man die Theile des Ganzen, die ihrer Folge nach in einer Reihe zuſammenhängend unter einander liegen ſollten, durch den geheimen Zwang einer ſchicklichen Einrichtung bequem neben und hinter einander zu ſtellen weiß. Verliert man gleich hierdurch den Vortheil, daß die geſuchten Zahlen nun nicht mehr in einer geraden Linie neben einander liegen, ſo wird doch ſolcher ſehr oft durch gebrochne Linien, und wo auch das nicht mehr ſtatt findet, durch die Bequemlichkeit des Abzählens oder Abmeſſens reichlich wieder erſetzt. So nahe gränzen alſo das Durchſchneiden und das Abzählen an einander, daß das eine unmittelbar da anfängt nützlich zu werden, wo das andere aufhört möglich zu ſeyn! und man würde ſich ſchon vorlängſt in den Beſitz des letztern Vortheils haben ſetzen können, wenn es dem menſchlichen Verſtande nothwendig, ich will nicht ſagen, gewöhnlich wäre, das, was vor Augen liegt, zuerſt zu ſehen.

Wie ſich die Potenzen überhaupt durch Addition aus den natürlichen Zahlen finden, und wie ſich vermittelſt der daher entſtehenden Zahlenreihen die höhern Potenzen dieſer natürlichen Zahlen, aus den nächſtvorhergehenden niedrigern, nach ihrer Ordnung ſummiren laſſen, hat der Herr von Schönberg in der obenangeführten Schrift S. 38. u. f. deutlich gezeigt. Ich will das Allgemeine dieſer Unterſuchung hier vortragen, und die Anwendung auf die Quadrat- und Cubiczahlen machen, wie ſich ſolche durch Abzählen finden laſſen.

Man ſetze die Potenzen m der natürlichen Zahlen in folgender Ordnung unter einander

$$\begin{array}{llllllllll}
1, & 2^m, & 3^m, & 4^m & \ldots\ldots & n^m & \ldots\ldots & & (n+r)^m = M \\
 & 2^m, & 3^m, & 4^m & \ldots\ldots & n^m & \ldots\ldots & & (n+r)^m \\
 & & 3^m, & 4^m & \ldots\ldots & n^m & \ldots\ldots & & (n+r)^m \\
 & & & 4^m & \ldots\ldots & n^m & \ldots\ldots & & (n+r)^m \\
 & & & & * \quad * & * & * \quad * & & * \\
 & & & & * & * & * \quad * & & (n+r)^m \\
 & & & & (n-1)^m, & n^m & \ldots & & (n+r)^m \\
 & & & & & n^m & \ldots\ldots & & (n+r)^m \\
 & & & & & & * \quad * & & * \\
 & & & & & & * & & (n+r)^m \\
 & & & & & & (n+r-1)^m, & & (n+r)^m \\
 & & & & & & & & (n+r)^m \\
\hline
\end{array}$$

$$1,\ 2^{m+1},\ 3^{m+1},\ 4^{m+1} \ldots (n-1)^{m+1},\ n^{m+1} \ldots (n+r-1)^{m+1},\ (n+r)^{m+1} = N$$

ſo findet man aus den *m*ten Potenzen M dieſer Zahlen die $(m+1)$ten Potenzen N, d. i. die nächſt höhern Potenzen, aus den unmittelbar vorhergehenden; folglich, weil m hier jede Zahl, alſo auch 1 ſeyn kann, aus der Reihe der natürlichen Zahlen, die Quadrate; aus dieſen die Cubiczahlen; und ſo fort alle übrigen Potenzzahlen nach ihrer Ordnung. Es iſt alſo M, aus welcher N und alle folgende Reihen entſtehen, die allgemeine Reihe aller Potenzen der natürlichen

Zah-

Zahlen, und n^m; $(n+r)^m$ ſind dieſer Reihe allgemeine Glieder. Beider Glieder Unterſchied iſt $(n+r)^m - n^m = m.n^{m-1}r + \frac{m.m-1}{1.2} n^{m-2} r^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} n^{m-3} r^3 \ldots + r^m = D$, welchen man bekommt, wenn man $(n+r)^m$ binomiſch entwickelt, und das erſte Glied n^m davon abziehet. Dieſe allgemeine Differenz D, heißt hier der Gnomon dieſer beyden allgemeinen Glieder n^m; $(n+r)^m$; indem ſolcher zu dem erſten hinzugeſetzt das letzte, ſo wie von dem letzten abgezogen, das erſte giebt; und ſo kann man auch für beſtimmte n, m und r, von der Potenz n^m an, die Potenz $(n+r)^m$ in der Tafel A, in welcher die Zahlen in natürlicher Ordnung anwachſen, aus D abzählen oder abmeſſen. Auf ähnliche Art heißt beym Euklides, (2. B. 2. Erkl.) nur mit andern Worten, diejenige Figur G, die an ein gegebenes Parallelogramm P, zu beyden Seiten deſſelben dergeſtalt anſchließt, daß daraus ein neues, dem erſtern ähnliches Parallelogramm $P \pm G$ entſtehet, ein Gnomon. Dieſer etwas allgemeine Begriff des Gnomons, läßt ſich ſehr leicht, und mit Vortheil auch auf andere geometriſche Figuren, nicht bloß auf Parallelogramme, erſtrecken, und dadurch noch allgemeiner machen; und wenn man dieſe Erweiterung auf die Zahlen überträgt: ſo entwickelt ſich hieraus der allgemeinſte Begriff eines Zahlengnomons. Man nenne nehmlich die einzelnen Glieder einer, nach einem beſtimmten Geſetze fortgehenden Zahlenreihe, ähnliche, und die gleichweit von einander entfernten, ähnlich liegende Glieder: ſo heißt jede Zahl, die zu einem Gliede dieſer Reihe hinzugeſetzt, oder von ihm abgezogen, ein ähnliches Glied hervorbringt, der Gnomon dieſes Gliedes; diejenigen Gnomones aber, durch deren Hinzuſetzung oder Abziehung man aus den zunächſt gefundenen beſtändig neue, aber ähnlich liegende Glieder der Reihe berechnet, heiſſen zuſammengehörige

hörige *Gnomones*; deren, für jeden gegebenen Fall, beſtimmte Fortſchreitung, in auf- und abſteigenden Reihen, durch die Reihe D allgemein gegeben iſt.

Für die Quadratzahlen wird $m = 2$, alſo $D = 2nr + r^2$, und bricht hier die Reihe der Gnomonum bey dem zweyten Gliede ab. Für die Cubiczahlen ſetzt man $m = 3$, daraus folgt $D' = 3n^2 r + 3nr^2 + r^3$ mit dem dritten Gliede vollſtändig: und ſo giebt D zu n^2, oder D' zu n^3 hinzugeſetzt, das Quadrat oder den Cubus von $n + r$, d. i. aus einer vorhergehenden Potenzzahl eine folgende, um *r* Stellen der Potenzreihe entfernte ähnliche Potenzzahl. Der Fortgang dieſes Geſetzes für noch höhere Potenzen fällt deutlich in die Augen.

Ich will itzt die Vortheile des allgemeinſten Quadrat-Gnomons, $2nr + r^2$, für die in aufſteigender Reihe wachſenden Quadratzahlen, durch ſucceſſive Beſtimmung der noch undeterminirten Zahlen n und r, näher entwickeln.

Man ſetze anfänglich $r = 1$, ſo verwandelt ſich D in $2n + 1$, und gehört als Gnomon zu der Quadratzahl n^2, zu welcher er hinzugeſetzt, das zunächſt folgende Quadrat giebt. Setzt man nun auch ſtatt n, nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 ... ſo bekommt man dadurch die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ... als eine gnomoniſche Reihe, durch welche man die Quadratzahlen nach ihrer Ordnung finden kann. Dieſe aus den Elementen bereits bekannte Methode, hält man insgemein für die leichteſte und bequemſte, dieſe Zahlen zu ſuchen. Die Folge wird aber lehren, daß es noch andere, eben ſo leichte, und in gewiſſer Rückſicht, noch bequemere Wege giebt, auf welchen man zu dieſen Zahlen gelangen kann.

Man ſetze $r = 2$, ſo gehört nunmehr $4n + 4$ als Gnomon zu n^2, und folgt daraus, für n nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 ... geſetzt, die gnomoniſche Reihe 4, 8, 12, 16 ... deren Glieder zu den gehörigen Quadraten addirt, neue

Qua-

Quadrate geben, die beſtändig um zwo Stellen von einander entfernt ſind.

Eben ſo giebt r = 3 den Gnomon $6n + 9$ zu dem Quadrate n^2; und n nach und nach 0, 1, 2, 3... geſetzt, die gnomoniſche Reihe 9, 15, 21, 27... für die um drey Stellen von einander entfernten Quadrate.

r = 4 geſetzt, giebt den Gnomon $8n + 16$ zu n^2; und n = 0, 1, 2, 3... die gnomoniſche Reihe 16, 24, 32, 40... für die um vier Stellen von einander entfernt liegenden Quadrate; und ſo giebt endlich

r = 5, den Gnomon $10n + 25$ zu n^2, und n = 0, 1, 2, 3... die gnomoniſche Reihe 25, 35, 45, 55... aus welcher die um fünf Stellen von einander liegende Quadrate entſpringen.

Beyfolgende Berechnung, für die verſchiedenen Beſtimmungen von r, in welcher die Quadrate mit ordentlichen, die *Gnomones* aber mit Curſivzifern gedruckt worden, wird dieſes alles deutlich vor Augen legen.

für r = 1	für r = 2	für r = 3	für r = 4	für r = 5
0	c, 1	0, 1, 4	0, 1, 4, 9	0, 1, 4, 9, 16
1	*4, 8*	*9, 15, 21*	*16, 24, 32, 40*	*25, 35, 45, 55, 65*
1	4, 9	9, 16, 25	16, 25, 36, 49	25, 36, 49, 64, 81
3	*12, 16*	*27, 33, 39*	*48, 56, 64, 72*	*75, 85, 95, 105, 115*
4	16, 25	36, 49, 64	64, 81, 100, 121	100, 121, 144, 169, 196
5	*20, 24*	*45, 51, 57*	*80, 88, 96, 104*	*125, 135, 145, 155, 165*
9	36, 49	81, 100, 121	144, 169, 196, 225	225, 256, 289, 324, 361
7	*28, 32*	*63, 69, 75*	*112, 120, 128, 136*	*175, 185, 195, 205, 215*
16	64, 81	144, 169, 196	256, 289, 324, 361	400, 441, 484, 529, 576
9	*36, 40*	*81, 87, 93*	*144, 152, 160, 168*	*225, 235, 245, 255, 265*
25	100, 121	225, 256, 289	400, 441, 484, 529	625, 676, 729, 784, 84
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Hier werden nehmlich durchgängig folgende Quadrate aus vorhergehenden, vermittelſt der Gnomonum, durch Addition gefunden, ſo, daß die Quadratzahlen in den Verticalreihen, nach den für r beſtimmten Entfernungen auf

einan-

einander folgen. Auch ſieht man deutlich, wie das, was hier nur bis auf r = 5 geht, auf ähnliche Art noch weiter hätte fortgeſetzt werden können, und man hat Grund zu vermuthen, daß die Vorausſetzung von r = 10, eine dem Decimalſyſteme vorzüglich angemeſſene Anordnung verſchaffen werde. Dieſe Vermuthung beſtätiget der Erfolg vollkommen. Denn wenn man die zehn erſten Quadrate, von 0 an bis mit 81, in eine Horizontalreihe ſchreibt: ſo fangen die Gnomones mit 100 an, wachſen in den wagerechten Reihen um 20, alſo in den ſenkrechten Reihen um 200, und bleiben folglich die beyden Endzifern der Gnomonum in dieſen Reihen immer dieſelben. Einen ähnlichen Fortgang und Anwachs beobachten auch die, aus dieſen Gnomonibus entſpringenden Quadratzahlen bey ihren beyden Endzifern in den Verticalreihen, welche, in der Ordnung, wie ſolche neben einander liegen, die Quadrate aller auf 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ſich endigenden Wurzeln, nach und nach, von einander abgeſondert, geben. Eine ſolche Einrichtung verhütet zugleich, daß Rechnungsfehler, die in einer Verticalreihe begangen worden, keinen Einfluß auf die andern Reihen haben können, und iſt zur Reviſion, man mag ſolche nach der Länge oder nach der Breite vornehmen, vorzüglich bequem. Setzt man noch hinzu, daß auf ſolche Art, auf einen mäßigen Bogen, 500 Quadratzahlen berechnet werden können: ſo erwächſt hieraus ein neuer Vortheil, indem die um 500 Stellen von einander entfernten Quadrate in den drey letzten, ſo wie die zugehörigen *Gnomones*, in den vier letzten Zifern jederzeit mit einander übereinkommen.

Ich will den Anfang einer ſolchen Einrichtung hier beyfügen:

*000; 001; 004; 009; 016; 025; 036; 049; 064; 081;
0100, 0120, 0140, 0160, 0180, 0200, 0220, 0240, 0260, 0280,
100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361;
0300, 0320, 0340, 0360, 0380,
400; 441; 484; 529; 576; u. ſ. w. f.
2c. 2c. 2c.

Das Ende, bis mit auf das 500te Quadrat, d. i. bis mit auf das Quadrat der Wurzel 499 iſt:

100; 081; 064; 049; 036; 025; 016; 009; 004; 001;
*9900, 9920, 9940, 9960, 9980,*0000, 0020, 0040, 0060, 0080,*

Die Gnomones ſind hier mit Curſivzifern gedruckt.

So ungefähr ſieht die Anordnung aus, die der Herr von Schönberg für die Berechnung dieſer Zahlen (für die Cubiczahlen iſt ſolche wieder ganz anders) getroffen hat; nur daß ſie noch mit allen Specialvortheilen aus den Anfangs- Mittel- und Endzahlen, die das Decimalſyſtem für gewiſſe einzelne Zahlen darbietet, verſetzt, und mit gewiſſen Anweiſungen für die Rechner verſehen iſt, wodurch nicht allein die Aufmerkſamkeit unterſtützt wird, ſondern auch begangene Fehler bequem verbeſſert werden können, auch, daß ſolche nicht zu weit in den Colonnen fortgeführet würden, durch die in bequemen Diſtanzen aufgeſtellten Wegweiſer verhütet worden iſt. Viele Zahlen werden hier beym Addiren übergangen, andere ſind ganz weggelaſſen worden, weil ſich ſolche, bey jedem einzelnen Quadrate, durch die getroffene Einrichtung von ſelbſt ergeben. Dieſe Anordnung iſt auf einem einzelnen Bogen abgedruckt, und verſtattet, durch bloſſes Nebeneinanderlegen dieſes, durch wiederholte Abzüge vervielfältigten Bogens, und durch Vorſchreibung gewiſſer, für jeden Bogen beſtimmten, in feſtgeſetzter Ordnung fortgehenden Zahlen, die Berechnung dieſer Potenzen auf jede verlangte Gränze auszudehnen; der äuſſerſt leichten und bequemen, Zeit, Raum und Koſten erſparenden Stellung, und

Abkürzung der Quadratzahlen, in der daraus flieſſenden Tafel, welche den zugehörigen, gleichfalls aufs möglichſte verkürzten Cubiczahlen, unmittelbar zur Seite ſtehen, nicht zu gedenken. Hiervon, ſo wie von allen übrigen dabey angebrachten Vortheilen, wird ihr Erfinder, zu ſeiner Zeit ſelbſt umſtändlich Nachricht geben.

Ob nun gleich dieſe mit vielem Scharfſinne und tiefer Einſicht in die dekadiſche Fortſchreitung der Zahlen von dem Herrn von Schönberg veranſtaltete Anordnung, in ihrer Art ſo vollkommen iſt, daß faſt nichts zu wünſchen übrig bleibt, da ſogar durch eine ganz neuerlich von ihm getroffene kleine Aenderung, ſich dieſe Zahlen, in der Lage und Ordnung ergeben, wie ſolche nachher in der Tafel ſelbſt abgedruckt werden müſſen: ſo hat mich doch dieſes nicht abgehalten, einen Verſuch zu machen, wie ſich dieſe Zahlen nach meiner Methode, durch bloſſes Abzählen oder Abmeſſen finden laſſen; wobey ich in dem Verfolge meiner Abſichten ſo glücklich geweſen bin, ein Geſetz zu entdecken, nach welchem man bey den Quadrat- Pronic- Trigonal- und verſchiedenen andern Zahlen, alle Berechnung, alles Abzählen und Abmeſſen, ganz aufheben, und dieſe Zahlen mit gröſter Leichtigkeit mechaniſch und aus freyer Hand nach ihrer Ordnung ſchreiben kann.

Hier muß ich die allgemeine, nunmehr ohne weitern Beweiß verſtändliche Anmerkung vorausſchicken, daß in allen Fällen, wo die Reihe gewiſſer zu ſuchenden Zahlen, aus beſtimmten Producten, oder durch das Geſetz, wie die *Gnomones* für dieſe Zahlen fortſchreiten, gegeben iſt, die Anwendung auf das Abzählen in der Tafel A ſich ſogleich, und in dem letztern Falle, nach eben dieſen *Gnomonibus*, unmittelbar ergiebt. Man kann alſo, nach dem im Vorhergehenden, für die verſchiedenen Beſtimmungen von r, gegebenen gnomoniſchen Tarif, die Quadratzahlen, wie dort durch Addition aus den Gnomonibus, alſo hier durch Abzählen aus

eben dieſen Zahlen, nach der Ordnung, auſſer der Ordnung, und in jeder beliebigen Entfernung von einander, finden; und eine kleine Aufmerkſamkeit wird zeigen, wie ſich dabey auch die Tafeln B und C mit Vortheil gebrauchen laſſen. Verſchiedene Specialbemerkungen, die ſich über den Fortgang dieſer Zahlen, nach der Länge und Breite des nur gedachten Tarifs, mit Nutzen machen lieſſen, übergehe ich mit Fleiß, weil ſolche nicht zunächſt zu meiner Abſicht gehören.

So wie die Tafel A zu Aufſuchung der Quadrate für alle Beſtimmungen von r überhaupt brauchbar iſt: ſo iſt ſie es doch vorzüglich für die einfachſte Vorausſetzung von r=1, für welche ſich die Quadrate von 0 an, nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9... abzählen laſſen. Die Beſtimmung von r=2 ſondert die geraden Quadratzahlen von den ungeraden kenntlich ab, und ſtellt ſie in zwo verticalen Reihen neben einander. Man kann alſo auch die geraden Quadrate aus der Tafel B, die ungeraden aus der Tafel C, beſonders ſuchen, wie ſogleich gezeigt werden ſoll.

Die Gnomones der nach ihrer Ordnung auf einander folgenden geraden Quadratzahlen ſind, wie gezeigt worden, 4, 12, 20, 28, 36... der ungeraden Quadratzahlen, 8, 16, 24, 32, 40... In der Tafel A, in welcher die Zahlen in natürlicher Ordnung fortgehen, könnte man jene von 00, dieſe von 01 an, nach ihren Gnomonibus abzählen; für die Tafeln B und C aber, wo die Zahlen von zwey zu zwey anwachſen, muß man dieſe Gnomones zuvor halbiren: dadurch bekommt man ſtatt der erſtern die Zahlen 2, 6, 10, 14, 18... ſtatt der letztern 4, 8, 12, 16, 20... alſo in beyden Fällen, zu nicht geringer Erleichterung des Abzählens, kleinere Zahlen.

Man ſetze, um ein Beyſpiel zu geben, die Hunderter nach der Reihe von 0 an, über die an den Colonnen der Tafeln B und C befindlichen Seitenſtriche, und zähle von dem

erſten Fache 00 der Tafel B, erſt 2 Fächer, von dieſem zweyten 6 Fächer, von dieſem letztern wieder 10, und ſo weiter 14, 18 ... Fächer, nach und nach ab, und bemerke das jedesmalige letzte von den ſo abgezählten Fächern, mit Einſchreibung der zugehörigen Quadratwurzel d. i. der in ihrer Ordnung fortgehenden geraden Zahl, ſo findet man alle gerade Quadratzahlen hinter einander, neben ihren geraden Wurzeln, deren Hälfte jedesmal zeigen wird, das wievielte Quadrat vom Anfange man gefunden habe. Auf eben die Art erhält man, wenn man die Gnomones 4, 8, 12, 16, 20 ... in der Tafel C, von 01 an, nach ihrer Ordnung, nach und nach abzählt, die ungeraden Quadrate, neben ihren ungeraden Wurzeln, die man zugleich bey dem Abzählen mit einſchreibt, nach einander; und ſo aus beyden Tafeln B und C alle Quadrate.

Da hier die Gnomones für beyderley Quadratzahlen in arithmetiſcher Progreſſion von der Differenz 4 fortgehen, ſo wachſen ſolche gleichwohl gar bald zu groſſen Zahlen an. Könnte man alſo ſtatt der geraden und ungeraden Zahlen in beyden Tafeln, andere Progreſſionalzahlen ſubſtituiren, bey denen die Gnomones für dieſe Potenzen kleiner würden: ſo würde dieſes das Abzählen noch beträchtlicher verkürzen und erleichtern.

Im vorhergehenden Abſchnitte iſt bereits gezeigt worden, wie man die ungeraden Quadrate aus den Zahlen von der Form $8n + 1$, die man am füglichſten nach einem Perioden von 200, von 5 zu 5 Zahlen, folgendergeſtalt anordnet,

0	*01, 09, 17, 25, 33
	41, 49, 57, 65, 73
1	81, 89, 97, *05, 13
	21, 29, 37, 45, 53
	61, 69, 77, 85, 93
2	*01 ꝛc. ꝛc.

nach den einfachſten Gnomonibus, d. i. nach den in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen 1, 2, 3, 4... abzählen könne. Vermuthlich wird man eben dieſe Bequemlichkeit auch für die geraden Quadratzah-

dratzahlen wünſchen, aber nie in dem Grade erlangen können.

Ich will die ſchicklichſte Progreſſionalreihe für dieſe geraden Quadrate, d. i. diejenige, für welche die Gnomones die möglichſt kleinſten Zahlen werden, hier angeben, und nachher den Weg zeigen, auf welchen man mehrere dergleichen Reihen und Zahlenformen für die Quadrate, und ſo auch für andere Zahlen, finden könne.

Man ordne die Zahlen von der Form 4n, wie vorher die von der Form 8n + 1, von 5 zu 5 Gliedern,

0	00,	04,	08,	12,	16
	20,	24,	28,	32,	36
	40,	44,	48,	52,	56
	60,	64,	68,	72,	76
	80,	84,	88,	92,	96
1	00	ꝛc.	ꝛc.		

ſo wird man hier alle gerade Quadrate, nach den von 1 an fortgehenden ungeraden Zahlen abzählen können. Dieſe geraden Potenzen liegen aber nunmehr faſt noch einmal ſo weit von einander, als die ungeraden in dem vorhergehenden Zahlenſyſtem, und es iſt nicht möglich, eine arithmetiſche Reihe ausfindig zu machen, die die geraden Quadrate eben ſo nahe als die ungeraden zu einander brächte. Der Grund hievon beruhet auf den Quadraten der geradgeraden und ungeradgeraden Wurzeln, die zwar beyde durch die Zahlenreihe der Form 4n, aber nicht durch eine höhere, bey welcher die Zahlen geſchwinder anwachſen, auf einerley Art gegeben ſind.

Um ſich hiervon auf das deutlichſte zu überzeugen, darf man nur die Reihe der erſtern Quadrate der Wurzeln von 0 bis 10, nach und nach mit allen einzelnen Zahlen von 10 bis auf 1 dividiren, und die jedesmaligen Reſte, ohne weiter dabey auf den Quotienten zu ſehen, gleich unter den Quadraten anmerken; wo die Diviſion aufgehet, ſetzet man 0 in die Stelle der Reſte.

Quadr. 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
Div. 10) 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 9) 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 8) 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 7) 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 6) 0, 1, 4, 3, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 5) 0, 1, 4, 4, 1; 0 ꝛc.
„ 4) 0, 1, 0, 1; 0 ꝛc.
„ 3) 0, 1, 1; 0 ꝛc.
„ 2) 0, 1; 0 ꝛc.
„ 1) 0; 0 ꝛc.

Dieſe Reſte halten ihren beſtimmten Perioden, nach welchem ſie immer wieder in derſelben Ordnung vorkommen; und obgleich der Glieder dieſer Perioden jederzeit ſo viel ſind, als der Diviſor Einheiten hat (man ſieht hier 0 mit als einen Reſt an) ſo ſind doch dieſe Reſte nicht in allen Gliedern verſchiedene Zahlen, ſondern es findet bey ihnen, eben die Symmetrie ſtatt, die man bey den Endziffern der Quadratzahlen ſelbſt, ſo wie bey den Zahlen in der Tabula mirifica, oder bey den Unzen der aus binomiſcher Entwickelung entſtandenen einzelnen Producte der zwotheiligen Wurzelgröſſen wahrnimmt, in welchen dieſelben Zahlen rückwärts, nach einerley Ordnung wie vorwärts fortgehen. Dieſes wird hier bey den Reſten ſtatt finden, wie groß auch immer der Diviſor d ſeyn mag, weil derſelbe Reſt r, den das Quadrat von irgend einer Zahl n, durch d dividirt, nachläßt, bey den Quadraten, der folgenden, um md (ein Vielfaches des Diviſors) gröſſern Zahlen, nothwendig wieder kommen muß; indem $(n+md)^2$ das iſt $d(m^2d+2m)+n^2$, durch d dividirt, keinen andern Reſt laſſen kann, als n^2 durch d dividirt, ſchon vorher gelaſſen hat.

Aus

Aus dieſen Reſten, mit den zugehörigen Diviſoren, kann man nun mit einem Blicke alle Formen der Zahlen (ſo weit ſolche durch die hier gebrauchten Diviſoren gegeben ſind) in welchen die Quadratzahlen, die geraden und ungeraden, nach der Ordnung oder auch ſprungweiſe, mit vorkommen, überſehen, und die ſchicklichſten daraus nach Abſicht wählen. Es ſind aber die Quadrate ſämmtlich, von dem kleinſten Diviſor anzufangen, enthalten, in den Zahlen

1) von der Form n,
2) von den Formen $2n$, $2n+1$
3) = = = $3n$, $3n+1$
4) = = = $4n$, $4n+1$
5) = = = $5n$, $5n+1$, $5n+4$
6) = = = $6n$, $6n+1$, $6n+3$, $6n+4$
7) = = = $7n$, $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$
8) = = = $8n$, $8n+1$, $8n+4$
9) = = = $9n$, $9n+1$, $9n+4$, $9n+7$
10) = = = $10n$, $10n+1$, $10n+4$, $10n+5$, $10n+6$, $10n+9$
ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ich will noch etwas zu näherer Erläuterung dieſer Formen hier beyfügen. In Anſehung des Theilers 10 z. E. ſind alle Zahlen, ohne Ausnahme, in einem von dieſen zehn Ausdrücken: $10n$, $10n+1$, $10n+2$, $10n+3$, $10n+4$, $10n+5$, $10n+6$, $10n+7$, $10n+8$, $10n+9$, oder, welches einerley iſt, in $10n$, $10n\pm1$, $10n\pm2$, $10n\pm3$, $10n\pm4$, $10n+5$, enthalten. Die durch 10 nicht theilbaren Quadrate, können aber nur die Reſte 1, 4, 5, 6, 9, keine andere, haben: alſo kann man für ſie, aus den obigen Formen, nur $10n+1$, $10n+4$, $10n+5$, $10n+6$, $10n+9$, d. i. $10n\pm1$, $10n\pm4$, $10n+5$, ſo wie für die durch 10 theilbarer Quadrate, nur die Form $10n$ beybehalten, und es iſt unmöglich, daß eine von den übrigen

Formen, $10n\pm2$, $10n\pm3$, iemals ein Quadrat werden kann.

Ich enthalte mich mehrere Anmerkungen beyzubringen, die ſich über die Reſte der Quadrate ſowohl, als der Zahlen überhaupt, mit groſſem Nutzen machen lieſſen. Man wird ohne Schwürigkeit einſehen, wie ſich daraus unzählich viele Tafeln herleiten laſſen, aus welchen man die Quadrate ſprungsweiſe, nach jeder beliebigen Ordnung, independent von den übrigen, finden und abzählen könnte. Die Tafeln A, B, C, ſind nichts weiter, als eine umſtändliche Ausführung nur der erſten drey Formen n, $2n$, $2n+1$, der erſten beyden Nummern. Sie ſind zwar durchgängig und allgemein brauchbar; doch bedient man ſich in gewiſſen ſpeciellen Fällen auch ſpeciellerer Tafeln, aus den übrigen Formen, mit größtem Vortheile; wie bereits an einigen Beyſpielen gezeigt worden iſt.

Wollte man die Quadratzahlen aus der Tafel A, in ihrer Ordnung, nach der gnomoniſchen Reihe der ungeraden Zahlen abzählen: ſo könnte man hierbey die Reſte der erſten hundert Quadratzahlen, oder auch nur, wegen der oben gemeldeten Symmetrie bey dieſen Reſten, der erſtern funfzig, ſo wie ſich ſolche aus der Diviſion durch 100, nach und nach ergeben, mit Nutzen gebrauchen. Denn wenn man nur die Fächer der Tafel, die dieſe Reſte enthalten, offen läßt, die andern aber durch Einſetzung eines gewiſſen Zeichens, oder auf andere Art (ungefähr wie in der Tafel C c, der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, durch Eindrückung eines Buchſtabens geſchehen iſt) zudeckt: ſo hat man die Tafel A ganz ſpeciell für die Aufſuchung der Quadratzahlen eingerichtet. Ich will itzt zeigen, wie man auch dieſe Diviſion erſparen, und die zu ſuchenden Reſte, ohne einmal die Quadrate ſelbſt zu wiſſen, in der Tafel abzählen könne.

Nach der Vorausſetzung kann ein ſolcher Reſt nie über 99 betragen. Ein einziges Geſetz der Tafel A von 00 bis 99, iſt

iſt alſo zu der Abſicht ſchon hinreichend. Man fange von 00 an, nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5... dergeſtalt abzuzählen, daß man jedes Fach, in welches eine von den zugehörigen ungeraden Zahlen fällt, von den übrigen, auf irgend eine Art, kenntlich auszeichnet. Iſt das Geſetz durchgezählt, und es bleiben am Ende noch einige Fächer übrig, ſo nimmt man ſie in Gedanken wieder mit zu den Anfang deſſelben Geſetzes, und zählt, ohne jedoch die Ordnung der ungeraden Zahlen zu unterbrechen, immer weiter, nicht anders, als ob ein neues Geſetz unmittelbar an den durchgezählten anläge. Dieſes Abzählen muß man auch ſo lange in dieſem Kreislaufe fortſetzen, bis endlich einmal eine Zahl von der Form n.100+1 wieder auf das Fach 01 fällt, welches hier (wie man auch im Voraus durch eine leichte Rechnung wiſſen kann) bey der Zahl 101 zuerſt zutreffen wird. Man iſt alsdenn gewiß verſichert, daß man alle zweyzifrige Reſte der Tafel angemerkt hat, weil die nun weiter folgenden ungeraden Zahlen, ſo wie die daraus entſtehenden Reſte, nur in den Hundertern, d. i. um ganze Geſetze, von den erſten unterſchieden ſind.

Die Auszeichnung der einzelnen Felder kann am füglichſten mit Buchſtaben geſchehen. Ich habe dazu bey dem Drucke kleine lateiniſche, ordentliche und curſiv Buchſtaben gewählt. Da beym Abzählen von 00 an, die ungerade Zahl 1 zunächſt auf 01 trift: ſo ſtehet in dem Fache 01 zuerſt der Buchſtabe a, welcher auch, ſo lange das Geſetz aushält, beybehalten wird; und ſo hat jedes, durch den Kreislauf wieder erneuerte Geſetz, ſeinen eignen Buchſtaben, nach der Folge derſelben, nur mit dem Unterſchiede, daß jeder neue Buchſtabe, in dem Geſetze, wo er zuerſt vorkommt, ein ordentlicher geradſtehender, in den übrigen Fächern dieſes Geſetzes aber, ein curſiv oder ſchiefſtehender

Buchſtabe iſt. Dieſe Bezeichnung hat nicht allein den Vortheil, daß man die abſolute Anzahl dieſer Reſte oder doppelten Endzahlen, deren es hier in allen 22 giebt, nach ihrer Folge ſogleich überſieht, ſondern daß man auch die Ordnung derſelben, wie ſolche nach und nach bey den 50 erſten Quadraten vorkommen, ſogleich aus der Folge dieſer Buchſtaben, auszeichnen, ſo wie aus dem letztern, in dem Fache oo ſtehenden Doppelbuchſtaben aa, erſehen kann, daß man 25 auf einerley Art eingerichtete Geſetze hierzu, als den kleinſten Perioden wählen müſſe, ſo wie man vorher die Geſetze in der Tafel Cc, nach 3 n, einem Vielfachen der Zahl 3, beſtimmen mußte. Ich übergehe die ſo ſymmetriſche Anzahl und Lage der in den Fächern angemerkten Reſte (die Singularendungen oo und 25 ausgenommen, von deren Abweichung die Urſache aus dem Decimalſyſtem leicht zu erklären iſt) ſo wie den von den Quadraten der Zahlen 25 n an, aufwärts und niederwärts ſteigenden übereinſtimmenden Perioden der beyden Endzahlen der Quadrate, nach welchem dieſelben, bey den Quadraten der Form $(25n \pm m)^2$ d. i. bey jeden zwey Quadraten, deren Wurzeln in der Summe 50 n betragen, oder eine durch 50 theilbare Zahl geben, einerley ſind; wie auch das Abzählen ſogleich, nach beyfolgendem Entwurfe, augenſcheinlich, ohne weitere Rechnung, zeigt.

Das Geſetz ſelbſt, mit den durch eingedruckte Buchſtaben bezeichneten Reſten oder doppelten Endzahlen (bey welchem die durch Buchſtaben beſetzten Fächer überhaupt die Form; die Ordnung und Folge der Buchſtaben in dieſen Fächern aber, insbeſondere den Perioden dieſer doppelten Endzahlen geben) iſt folgendes:

00 b, e, k r, aa	01 a, z	02	03	04 a, y	05	06	07	08	09 a, x
10	11	12	13	14	15	16 a, w	17	18	19
20	21 b, q	22	23	24 d, l	25 a, c, g n, v	26	27	28	29 f, h
30	31	32	33	34	35	36 a, w	37	38	39
40	41 e, i	42	43	44 b, p	45	46	47	48	49 a, t
50	51	52	53	54	55	56 c, m	57	58	59
60	61 d, k	62	63	64 a, s	65	66	67	68	69 b, o
70	71	72	73	74	75	76 f g	77	78	79
80	81 a, r	82	83	84 e, h	85	86	87	88	89 c, l
90	91	92	93	94	95	96 b, n	97	98	99

Um alſo eine ſchickliche und brauchbare Einrichtung für das Abzählen oder Abmeſſen der Quadrate zu treffen, müßte man die hier mit Buchſtaben beſetzten Felder, mit ihrer Zahl, ganz frey und offen laſſen, die leeren Fächer aber, mit Herausnehmung ihrer Zahl, durch einen groſſen Buchſtaben, oder auf andere Art, ein für allemal, als ganz unbrauchbare Fächer, in welche nie eine Quadratzahl fallen kann, zudecken. In einem Perioden von 25 Geſetzen, würde alsdenn eins wie das andere ausſehen, und da (zween ſehr leicht kenntliche Fälle ausgenommen) nie zwo offene Felder neben oder über einander liegen: ſo iſt es auch, bey der geringſten Aufmerkſamkeit, nicht möglich, einen Fehler im Abzählen zu bege-

begehen, der ſich nicht ſogleich dadurch veroffenbaren ſollte, daß man auf ein zugedecktes Fach trift, wo man die Wurzel nicht einſchreiben kann. Nur bey 00, 01 und bey 24, 25 ſcheint ſich eine Gelegenheit zum Verſehen anzubieten. Dieſe verſchwindet aber ſogleich, wenn man bemerkt, daß, indem man die ungeraden Zahlen von 1 an, als Gnomones, von der Gränze 00 abzuzählen angefangen, das Fach 00 nur allein den Zahlen von der Form $10(2n+1)+9$, ſo wie das Fach 25, keinen andern, als denen von der Form $20n+9$ zugehört, und daß alſo auf die beyden Fächer 00 und 25, nie eine andere, als auf 9 ſich endigende, im erſten Falle einem ungeraden, im zweyten einem geraden Zehner zugehörige Zahl, als Gnomon treffen kann; dergleichen im Gegentheil in die Fächer der Zahlen 01 und 24 nie fallen, indem ſolche den gnomoniſchen Endzahlen 01, 97, und 35, 63, nach ihrer Ordnung zukommen. Um recht ſicher zu gehen, könnte man auch die Endzahl *9*, als eine Curſivzahl, in den Fächern 00 und 25, nachrichtlich zur Seite mit eindrucken laſſen. Dergleichen Nachrichten lieſſen ſich ſehr leicht, wenn es nöthig wäre, auch den andern Fächern beyfügen.

Auf ſolche Art ſcheint alſo das Abzählen der Quadrate auf das vortheilhafteſte eingerichtet zu ſeyn, ſo, daß man nur noch die Hunderter den Colonnen vorzuſchreiben braucht, wenn man die Arbeit ſelbſt vornehmen will. Hierbey aber äuſſert ſich eine Schwürigkeit von gröſter Erheblichkeit, die die gewonnenen Vortheile wieder vernichtet, wenn man ſie nicht aus dem Wege räumen kann. Denn wenn man die Quadrate auf dieſe Art nur etwas weit hinter einander ſuchen wollte, ſo würde die Anzahl der hierzu nöthigen Bogen auſſerordentlich anwachſen, ſo, daß man, wenn man auch zween Perioden, oder 50 Geſetze, auf einen Bogen bringen wollte, für die Quadratzahlen bis auf die Wurzel 100000 gerade 2000000 Bogen haben müßte, welches, jeden einzelnen, ſo eingerichteten Bogen, nur zu drey Pfennigen gerechnet,

net, einen Aufwand von mehr als 20000 Thalern erfordern würde.

Dieſe ſo erſtaunlich groſſe Anzahl von Bogen, die noch überdieß das Anſchreiben der Hunderter und Abzählen der Gnomons ganz unmöglich macht, iſt gleichwohl nur eine Kleinigkeit, wenn man ſie gegen die 1382400 Folianten, jeden von nicht weniger als 1500 Seiten hält, welche ſich ohnlängſt dem vortreflichen Aſtronomen, Herrn Johann Bernoulli in Berlin, bey der erſten Nachforſchung anboten, wie groß der Umfang einer Tafel werden würde, in welcher man alle mögliche ſphäriſche Triangel, nach allen einzelnen Secunden der Seiten und Winkel, ohne jedoch dabey für beyde über 90 Grad hinauszugehen, ein für allemal berechnet, durch bloſſes Aufſchlagen bequem finden könnte *. Ob nun gleich die Aſtronomen, bey Erblickung auch der größten Zahlen, nicht eben leicht zu erſchrecken pflegen: ſo hat dennoch Herr Bernoulli, der nicht nöthig hat, bey dem, was ſich ihm zuerſt darbietet, ſtehen zu bleiben, bey weiterm Nachdenken, das Werk auf ſolche Gränzen zurückzuſetzen gewußt, wodurch die Bearbeitung deſſelben nicht allein möglich, ſondern auch der Gebrauch, durch eine geſchickte Einrichtung und Anordnung des Ganzen, bequem und der Erwartung der Kenner gemäß ausfallen wird.

Der Wunſch, die bey dem Abzählen der Quadrate ſich geäuſſerte Schwürigkeit gründlich zu heben, forderte einen ähnlichen Verſuch von mir, den ich auch ſogleich, und mit Hoffnung eines glücklichen Erfolges, um ſo mehr vornahm, da ich bereits, wie in dem Anfange dieſes Abſchnittes gezeigt worden iſt, ein eben ſo groſſes, auf noch mehrere Zahlen ſich erſtreckendes Hinderniß, durch Verwandlung der trian-

gulä-

* Man ſehe das vom Herrn Bernoulli in No. VIII. angezeigte Projet d'un ouvrage trigonométrique etc in deſſen dritten Theile der Recueil pour les Aſtronomes. Berlin 1776.

gulären Form in die rectangulare, aus dem Wege geräumet hatte. Hätte ich hier den Muth ſinken laſſen, und die Sache als unmöglich aufgegeben: ſo hätte ich mich zugleich einer der angenehmſten, und, wegen der Folgerung auf andere Zahlen, nicht unwichtigen, aus der innern Natur des dekadiſchen Zahlenſyſtems hergeleiteten Bemerkung, über die Fortſchreitung der Quadratzahlen, beraubt, nach welcher ſich diese Zahlen, ohne alle Berechnung, ohne Abzählen oder Abmeſſen, ganz mechaniſch und aus freyer Hand, mit größter Leichtigkeit und Sicherheit hinter einander wegſchreiben laſſen. Ein augenſcheinlicher Beweis, was für eine reiche Erndte, auf dieſem unüberſehbaren Felde, zu welchem mir meine Methode zuerſt den Zugang eröffnet hat, noch zu hoffen ſey!

Ich will die Sache hier vortragen, wie ich ſie gefunden habe. Man wird daraus deutlich ſehen, welch einen unmittelbaren Zuſammenhang ſie mit dem Abzählen hat, und daß man vermuthlich, ohne dieſe oder eine ähnliche Methode, nicht ſo leicht auf dieſe Erfindung gefallen ſeyn würde.

Da man den Umlauf der beyden Endzahlen ſo leicht findet, und dabey alle Schwürigkeiten nur auf die Anfangszahlen oder Hunderter fallen: ſo iſt wohl nichts natürlicher als der Gedanke, ob man nicht ein leichtes Mittel ausfindig machen könne, wodurch man die Hunderter, anſtatt ſolche auf die Seitenſtriche der Colonnen nach der Ordnung zu ſetzen, den Geſetzen ſprungweiſe vorſchreiben könne, ſo, daß das zunächſt anliegende Geſetz jederzeit das unmittelbar folgende Quadrat geben müſſe.

Ich ſetze dabey itzt voraus, man habe den oben erwähnten, auf vorhergezeigte Art eingerichteten Perioden von 25 Geſetzen, durch welchen man, mit Vorſchreibung der Hunderter nach der Ordnung von 0 bis 24, alle Quadrate der Wurzeln von 0 bis an 50 findet, durch Aneinanderlegung der Bogen, bis auf eine gewiſſe feſtgeſetzte Gränze erweitert.

Wenn

Wenn man nun die nächſtfolgenden, durch Addition gefundenen, oder auf andere Art berechneten Quadrate, bis auf die Wurzel 100, nach ihrer Fortſchreitung in den Anfangszahlen unterſucht: ſo findet ſich, daß hier die Hunderter in den Quadraten der Wurzeln 50 bis 100, von 25 ununterbrochen bis mit 34, hierauf von 36 bis mit 40, ferner von 42 bis mit 44 ꝛc. alſo, nach gewiſſen Hundertern, wie bey den hier genannten, in fortlaufender Ordnung, nach andern aber, ſprungweiſe, aufeinander folgen. Dieſe Anomalie findet ſich bey den folgenden Quadraten noch häufiger ein, bis an das Quadrat von 91, von welchem an die Hunderter bis mit 100^2, von zwey zu zwey, regelmäſſig anwachſen.

Dieſe Ungleichheit, die in der Folge noch weit beträchtlicher wird, wird man nicht ſo leicht, auf dem gewöhnlichen Wege, durch eine ſichere Regel beſtimmen können. Bringt man aber die Aufſuchung dieſer und der folgenden Quadrate, bis mit der Wurzel 500, auf das Abzählen, aus den, nach ununterbrochener Folge der Hunderter, fortgehenden Geſetzen, ſo wird die Art und Weiſe die ſo ungleichen und unregelmäſſigen Sprünge, nach der Ordnung, und was noch mehr iſt, auch auſſer der Ordnung, zu beſtimmen, einem, auch nur mittelmäſſigen Beobachter, ſogleich in die Augen fallen.

Die abzuzählenden Gnomones der Quadratzahlen der Wurzeln von 51 bis 100, ſind die nach der Ordnung fortgehenden ungeraden Zahlen von 101 bis 199, d. i. von 100+1 bis 100+99. Man wird alſo, wenn man itzt den Fortgang der beyden Endzahlen, als bereits ausgemacht, bey Seite ſetzt, um das nächſtfolgende Quadrat aus dem vorhergehenden zu finden, jedes Hundert des vorhergehenden Quadrates um eine Einheit ſeiner Art vermehren müſſen: dabey ſich denn bey dem wirklichen Abzählen ſehr oft, z. E. bey den Quadraten von 60, 65, 68, 70, 73, 75, 77, 79, 80,

80, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, der Fall ereignen wird, daß das zu findende Quadrat nicht in das nächſtfolgende, ſondern in ein, um Eins weiter, liegendes Geſetz fallen wird. Es fragt ſich nur, wie man dieſen Fall im Voraus beſtimmen ſoll, damit man die Hunderter dieſer Gnomonum ein für allemal bey dem Abzählen erſparen, und nur ihre Zehner und Einer abzählen darf. Nichts iſt aber nunmehr leichter als dieſes, wenn man nur bedenkt, daß jede, um ein oder mehrere Hunderte entfernte Zahl in der Tafel, nothwendig gerade dieſelben Zehner und Einer haben müſſe, und daß alſo, ſobald die Zehner und Einer für ein folgendes Quadrat kleiner werden, als ſie bey dem nächſtvorhergehenden Quadrate waren, dieſe beyden Endzahlen des folgenden Quadrates nicht in einerley Geſetz mit dem fallen können, in welches das Hundert aus dem *Gnomon* fällt, ſondern daß ſie nothwendig in ein zunächſt anliegendes Geſetz zu liegen kommen müſſen. Da man aber den Fortgang und die Wiederkehr der beyden Endzahlen mit Sicherheit ſchon im Voraus weiß, ſo kann man auch hierdurch die regelmäßige Fortſchreitung der Hunderter, ſo wie die Stellen, wo bey dieſen Hunderten noch Eins über die gewöhnliche Zahl hinzugeſetzet werden muß, leicht beſtimmen; wobey ſich zugleich der Vortheil ergiebt, daß, wenn man, nach dem was aus dieſer Beobachtung folgt, die Hunderter ſprungweiſe über die Seitenſtriche der Colonnen ſetzt, man für die Erfindung und Abzählung aller Quadratzahlen, von den Wurzeln 1 bis 100000, in allem nicht mehr, als 99975 Geſetze braucht, die noch nicht ganz 2000 auf vorhergemeldete Art eingerichtete Bogen betragen.

Aber auch dieſe Bogenzahl kann man, wie ſogleich gezeigt werden ſoll, ſehr leicht auf ihren zehnden Theil, oder auf 200 Bogen herunter ſetzen, und dadurch die Erfindung dieſer Zahlen, auf einen 10000mal kleinern Raum einſchränken,

ken, als ſie nach dem erſten Anſchlage einnehmen würde. Die Koſten dafür würden nicht viel über zween Thaler betragen; auch kann man hierbey das bey den größern Gnomonibus weitläuftigere Abzählen in ein augenblickliches Anweiſen verwandeln.

Schreibt man die Hunderter den einzelnen Geſetzen der Colonnen, auf die Art, wie gefordert worden, ſprungweiſe vor, ſo fällt, nach den erſten funfzig Quadraten, wie im Vorhergehenden gezeigt worden iſt, in jedes ſolches Geſetz eine Quadratzahl. Was hindert alſo, daß man nicht jede einzelne Horizontalreihe von 10 Fächern, für ein Geſetz von 100 Fächern annimmt und gelten läßt, wenn man bey den erſtern, wie bey den letztern, die Endzifern, und ihre unmittelbare Fortſchreitung bequem anmerken und bezeichnen kann? Dieſes wird aber am füglichſten geſchehen können, wenn man jedem einzelnen Fache einer ſolchen wagerechten Reihe einen abſoluten oder conſtanten Werth aus den einzelnen Einern von 0 an bis mit 9, nach ihrer Ordnung, aber einen variablen oder unbeſtimmten Werth aus den Zehnern, von 10 an bis mit 90, in und außer der Ordnung zueignet; die beyden Endzahlen der Quadrate, wie ſolche auf einander folgen, in das durch den Einer jedesmal beſtimmten Fach, gehörig einträgt; die nächſtfolgenden beyden Endzahlen aber zugleich, was ſie auch für Zahlen ſeyn mögen, in eben dieſes Fach zu bequemer Vergleichung und Anweiſung, unten hin zur Seite, mit beyfügt; weil ſich, wenn man einmal den Gang der Hunderter weiß, die man nun dieſen einzelnen wagerechten Reihen vorſetzen muß, aus dem Steigen oder Fallen dieſer Endzahlen, zugleich beſtimmen läßt, ob man denſelben Gang fort, oder noch um einen Schritt weiter gehen müſſe.

Die hierzu erforderliche Einrichtung wird beyfolgender Entwurf für die Quadratzahlen der Wurzeln 475, 476, 477, 478, 479, bey welchen die Hunderter der Quadra-

te, ſo lange gróſſere Endzahlen auf kleinere folgen, jedesmal um *9*, im entgegengeſetzten Falle aber, um *10* Hunderter anwachſen, deutlich vor Augen legen,

Quadr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Radd.
2256.						25 *76*					475
2265..							76 *29*				476
2275..										29 *84*	477
2284..					84 *41*						478
2294..		41 *00*									479
2304..											

bey welchem man die Wurzeln entweder unter die zugehórigen Endzahlen zugleich in die Fächer mit eintragen, oder auch, wie hier ſtehet, am Rande, den Quadraten gegen über, anmerken kann. Fünf und zwanzig wagerechte Reihen geben hier einen Perioden, und ſo paßt ein Period, den man ein für allemal durch den Druck ſich muß einrichten laſſen, wenn man ihn nicht aus Numer I der weißen Tafel D, ſich ſelbſt machen will, genau an den andern; welches dient, die Arbeit mit einer ſehr leichten Vorrichtung ſo weit fort zu ſetzen, als man nur will. Die unten hin zur Seite beygeſetzten nächſtfolgenden Endzahlen ſind hier durchgehends curſiv gedruckt.

So kurz und bequem auch dieſe Einrichtung für die Quadratzahlen wirklich iſt: ſo wird man doch bald ſehen, daß die vorzuſchreibenden Hunderter in der Folge ſich doch nicht ohne alle Berechnung auf der Stelle finden laſſen. Es

wird

wird alſo Zeit ſeyn, auch dieſe Berechnung aufzuheben, und die nöthigen Anweiſungen, ſo wie die Zahlen ſelbſt, noch näher zuſammen zu bringen.

Bekanntermaaßen läßt ſich jede ungerade Zahl durch $2n \pm 1$ allgemein ausdrücken, und wenn man in $2n-1$ ſtatt n eine ganze Zahl ſubſtituiret, ſo findet man daraus ſogleich die ſo vielte ungerade Zahl, als n Einheiten hat; alſo für $n=1$ die erſte ungerade Zahl 1, für $n=2$ die zwote ungerade Zahl 3, für $n=50$ die funfzigſte ungerade Zahl 99. Daraus ergiebt ſich, wie bekannt, die Summe der erſten n ungeraden Zahlen $=(1+2n-1).\frac{n}{2}=n^2$, dem nten Quadrate; alſo für $n=50$, die Summe der erſten 50 ungeraden Zahlen, oder das 50ſte Quadrat $=(1+99)\frac{50}{2}$ $=2500$, wie man gefunden haben würde, wenn man die 50ſte ungerade Zahl, d. i. 99, zum 49ſten Quadrate wirklich addirt hätte. Setzt man nun nach und nach die Zahlen 50, 100, 150, 200, 250 ꝛc. ſtatt n in $2n-1$, ſo findet man von den ungeraden Zahlen

die 50ſte = 99	die 550ſte = 1099	die 1050ſte = 2099	ꝛc.
= 100te = 199	= 600te = 1199	= 1100te = 2199	
= 150ſte = 299	= 650ſte = 1299	= 1150ſte = 2299	
= 200te = 399	= 700te = 1399	= 1200te = 2399	
= 250ſte = 499	= 750ſte = 1499	= 1250ſte = 2499	ꝛc.
= 300te = 599	= 800te = 1599	= 1300te = 2599	
= 350ſte = 699	= 850ſte = 1699	= 1350ſte = 2699	
= 400te = 799	= 900te = 1799	= 1400te = 2799	
= 450ſte = 899	= 950ſte = 1899	= 1450ſte = 2899	ꝛc.
= 500te = 999	= 1000ſte = 1999	= 1500te = 2999	

Bey den hier von 50 zu 50 berechneten ungeraden Zahlen, ſo wie bey allen folgenden, wachſen die Hunderter regelmäßig, von 0 an, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen. Daß

 hier

hier der Anfang von 50 genommen worden, iſt dabey ganz willkührlich, und es wird, wegen des durchgehends gleichförmigen Fortgangs der ungeraden Zahlen, von zwey zu zwey, für jede andere um 50, oder um ein Vielfaches der 50, von einander entfernte ungerade Zahlen, eben das für die Hunderter folgen müſſen. Gehört alſo die nte ungerade Zahl $2n-1$, zu $p.100+q$, ſo wird auch die $(n+m.50)$ſte ungerade Zahl $2(n+50m)-1$, zu $(p+m)100+q$ gehören, was auch p und q ſeyn mögen, die für ein gegebenes n aus $2n-1$ allemal vollkommen beſtimmt ſind.

Hieraus folgt, wenn man m nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... 100... 1000... ſetzt, daß

1) in denen von 50 zu 50 von einander entfernten ungeraden Zahlen die Hunderter,
2) in denen von 500 zu 500 von einander entfernten ungeraden Zahlen die Tauſender,
3) in denen von 5000 zu 5000 von einander entfernten ungeraden Zahlen die Zehntauſender,
4) in denen von 50000 zu 50000 von einander entfernten ungeraden Zahlen die Hunderttauſender, u. ſ. w. bey den übrigen, immer um zehnmal weiter von einander entfernten ungeraden Zahlen, die folgenden Claßen, um eine Einheit ihrer Art jederzeit nach der Ordnung anwachſen werden.

Die vorhergehende Berechnung zeigt ſolches für 1) und 2) ſehr deutlich, wenn man ſie für 1) nach der Länge, für 2) nach der Breite betrachtet. Wegen der Numern 3) und 4) fände man von den ungeraden Zahlen

für 3)		für 4)	
die 5000te =	9999	die 500000te =	99999
≈ 10000te =	19999	≈ 1000000te =	199999
≈ 15000te =	29999	≈ 1500000te =	299999
≈ 20000te =	39999	≈ 2000000te =	399999
≈ 25000te =	49999	≈ 2500000te =	499999
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

daß

daß alſo, wenn man einmal die m. 50ſte ungerade Zahl weiß, man zu ihr, für die 10, 100, 1000... mal entferntern, nichts weiter als eine, zwo, drey... Neunen, rechter Hand hinzuſchreiben darf; wie auch die Form 2 n — 1 dieſer Zahlen mit einem Blicke zu erkennen giebt.

Dieſe ungeraden Zahlen ſind aber auch hier zugleich *Gnomones*, welche nach ihrer Ordnung zu einander addirt, immer neue Quadratzahlen geben, deren Hunderter, Tauſender, Zehntauſender u. ſ. f. folglich auch nach einem beſtimmten Geſetze fortgehen müſſen, das ſich nunmehr aus dem vorhergehenden Tarif der ungeraden Zahlen leicht finden läßt, wenn man dabey zugleich auf den Fortgang und auf die Folge der beyden Endzifern in den erſten 50; der drey Endzifern in den erſten 500; der vier Endzifern bey den erſten 5000; der fünf Endzifern bey den erſten 50000 u. ſ. w. Quadraten Acht hat. Man ſetzt hierbey nichts weiter als die erſten 50 Quadrate, als berechnet voraus, die man durch Addition oder Abzählen, leicht finden, oder auch, wenn man will, vermittelſt der erſten fünf Quadrate ſogleich machen kann.

Wie man aus dieſen erſten 50 Quadraten die nächſten 450, aus den erſten 500 Quadraten die nächſten 4500 ꝛc. Quadrate durch die zugehörigen Endzifern, mechaniſch finden, und ſich alſo von einer Gränze immer zu der nächſten zehnfach weitern ſicher und bequem fort finden könne, wird folgende Tabelle der erſten 500 Quadrate, nebſt dem, was aus ihr für die übrigen gefolgert wird, klar und deutlich vor Augen legen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	=	26	102	228	404	630	906	1232	1608	2034
04	=	27	104	231	408	635	912	1239	1616	2043
09	=	28	106	234	412	640	918	1246	1624	2052
16	=	29	108	237	416	645	924	1253	1632	2061
25	=	30	110	240	420	650	930	1260	1640	2070
36	=	31	112	243	424	655	936	1267	1648	2079
49	=	32	114	246	428	660	942	1274	1656	2088
64	=	33	116	249	432	665	948	1281	1664	2097
81	=	34	118	252	436	670	954	1288	1672	2106
00	1	36	121	256	441	676	961	1296	1681	2116
21	1	37	123	259	445	681	967	1303	1689	2125
44	1	38	125	262	449	686	973	1310	1697	2134
69	1	39	127	265	453	691	979	1317	1705	2143
96	1	40	129	268	457	696	985	1324	1713	2152
25	2	42	132	272	462	702	992	1332	1722	2162
56	2	43	134	275	466	707	998	1339	1730	2171
89	2	44	136	278	470	712	1004	1346	1738	2180
24	3	46	139	282	475	718	1011	1354	1747	2190
61	3	47	141	285	479	723	1017	1361	1755	2199
00	4	49	144	289	484	729	1024	1369	1764	2209
41	4	50	146	292	488	734	1030	1376	1772	2218
84	4	51	148	295	492	739	1036	1383	1780	2227
29	5	53	151	299	497	745	1043	1391	1789	2237
76	5	54	153	302	501	750	1049	1398	1797	2246
25	6	56	156	306	506	756	1056	1406	1806	2256
76	6	57	158	309	510	761	1062	1413	1814	2265
29	7	59	161	313	515	767	1069	1421	1823	2275
84	7	60	163	316	519	772	1075	1428	1831	2284
41	8	62	166	320	524	778	1082	1436	1840	2294
00	9	64	169	324	529	784	1089	1444	1849	2304
61	9	65	171	327	533	789	1095	1451	1857	2313
24	10	67	174	331	538	795	1102	1459	1866	2323
89	10	68	176	334	542	800	1108	1466	1874	2332
56	11	70	179	338	547	806	1115	1474	1883	2342
25	12	72	182	342	552	812	1122	1482	1892	2352
96	12	73	184	345	556	817	1128	1489	1900	2361
69	13	75	187	349	561	823	1135	1497	1909	2371
44	14	77	190	353	566	829	1142	1505	1918	2381
21	15	79	193	357	571	835	1149	1513	1927	2391
00	16	81	196	361	576	841	1156	1421	1936	2401
81	16	82	198	364	580	846	1162	1528	1944	2410

	0	1	2	3	4	5	6	7	6	9
64	17	84	201	368	585	852	1169	1536	1953	2420
49	18	86	204	372	590	858	1176	1544	1962	2430
36	19	88	207	376	595	864	1183	1552	1971	2440
25	20	90	210	380	600	870	1190	1560	1980	2450
16	21	92	213	384	605	876	1197	1568	1989	2460
09	22	94	216	388	610	882	1204	1576	1998	2470
04	23	96	219	392	615	888	1211	1584	2007	2480
01	24	98	222	396	620	894	1218	1592	2016	2490
00	25	100	225	400	625	900	1225	1600	2025	2500
	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=
	50^2	100^2	150^2	200^2	250^2	300^2	350^2	400^2	450^2	500^2

Zuerſt linker Hand, ſtehen die, allen, von 50 zu 50 fortſchreitenden Quadraten, gemeinſchaftlichen beyden Endziffern, von den übrigen Reihen durch einen Doppelſtrich abgeſondert. Die nächſte erſte Colonne enthält die Hunderter, der von 1 bis mit auf die Wurzel 50 gehenden erſten 50 Quadrate, nachher folgen die Hunderter der Quadrate von den Wurzeln 101 bis mit 150, u. ſ. w. bis auf die Hunderter der Quadrate von den Wurzeln 451 bis mit 500; welche insgeſammt, mit den correſpondirenden Endziffern verbunden, die Quadrate der zugehörigen Wurzeln, von 1 — 500 vollſtändig geben, wobey zugleich, wie weit ſolche in den Verticalreihen gehen, durch die unten beygefügte Quadrat-Zahl angezeiget worden iſt.

Dieſe 500 Quadrate ſind aus dem Perioden der erſten 50 beyden Endziffern, auf die leichteſte Art entſtanden, indem man nur die überſchriebenen Zahlen, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu den Hunderten in den darunter ſtehenden Verticalreihen, ſo lange dieſe Endziffern wachſen, addiret, und für die Stellen, wo ſie abnehmen, noch Ein Hundert mehr genommen hat. Zu mehrerer Bequemlichkeit ſind die Stellen der abnehmenden Endziffern, damit ſie ſogleich in die Augen fallen möchten, hier mit Curſivziffern beſetzt worden.

Der Grund dieſes Verfahrens beruhet ganz auf dem Vorhergehenden. Denn da die Zahl 99 als Gnomon das 50ſte, die Zahl 199 das 100te, die Zahl 299 das 150ſte, die Zahl 399 das 200te u. ſ. w. Quadrat hervorbringt, ſo geben die *Gnomones* 101, 201, 301, 401, ꝛc. das 51ſte, 101ſte 151ſte, 201ſte Quadrat ꝛc. Dieſe letztern Gnomones aber, die insgeſamt um 50 Stellen von einander entfernt ſind, fallen ſämtlich, ſo wie alle folgende ähnliche *Gnomones*, beym Abzählen auf das Fach 01, und erneuern dadurch den Perioden der beyden Endzifern, ſo, daß hier alle Veränderung bey den Quadraten, nur auf die Hunderter fallen, die man in den zugehörigen 50 Quadraten durchgehends um das Hundert ihres Gnomons, nach und nach erhöhen muß, wenn nicht abnehmende Endzifern zu erkennen geben, man müſſe noch Ein Hundert, über die Hunderte des Gnomons dem Quadrate hinzuſetzen, weil, wie im Vorhergehenden gezeigt worden iſt, dieſe beyden Endzifern des folgenden Quadrates, nicht in einerley Geſetz mit dem fallen können, in welches das Hundert aus dem Gnomon fällt, ſondern nothwendig in ein folgendes Geſetz zu liegen kommen müſſen.

Auf dieſe Weiſe hat man nun aus den erſten 50 quadratiſchen beyden Endzifern, die Quadrate ſelbſt von 1 bis auf die Wurzel 500, mit größter Leichtigkeit und Geſchwindigkeit ganz mechaniſch gefunden, und dabey neben her drey Fehler der Ludolphiſchen Tetragonometrie in den Quadraten der Wurzeln 111, 112, 445, und eine, in meinem Exemplare, unkenntlich gedruckte Zifer in dem Quadrate von 195 verbeſſert, die der Fortgang der Endzifern, ſo wie der Hunderter, ſogleich zu erkennen gab.

Aus der Formel $2n - 1$ findet ſich, wie bereits gezeigt worden iſt, die 500te ungerade Zahl $= 999$, die 1000ſte $= 1999$, die 1500te $= 2999$ u. ſ. w. und ſo geben die *Gnomones* 1001, 2001, die Quadratzahlen der Wurzeln 501, 1001, 1501... Jede um 500 Stellen von einander entfernte Quadrate, kommen aber

auch

auch in den letzten drey Zifern mit einander überein, wie man aus der Formel $(m+500)^2$ ſogleich erkennen wird. Man kann alſo die bereits berechneten erſten 500 Quadrate, oder vielmehr ihren Perioden aus den drey letzten Endzifern, den man nun zugleich mit gefunden hat, als eine Norm gebrauchen, nach welcher man zu dieſen Quadraten die übrigen, bis auf die Wurzel 5000, (wie vorher die erſten 500 Quadrate, aus den beyden Endzifern der erſten 50 Quadrate) ſogleich findet, wenn man hierzu, in den, nach der Ordnung auf einander folgenden, von 500 zu 500 in den Verticalreihen fortgehenden Quadraten, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu den Tauſenden, wie vorher zu den Hunderten, nach und nach hinzuſetzt, und jedes auf ſolche Art beſtimmte Tauſend, für die Stellen, in welchen die drey Endzifern, als abſolute Zahlen betrachtet, abnehmen, um eine Einheit ihrer Art vermehret; weil hier bey dem Abzählen, (wenn man nun die einzelnen Geſetze nach Tauſenden, wie vorher nach Hunderten beſtimmt, und die Tauſender nach der Ordnung dieſen neuen Geſetzen in der Tafel vorſchreibt) eben das für die Tauſende folgt, was vorher für die Hunderte gezeigt worden iſt: daß nehmlich jede um ein oder mehrere Tauſende von einer andern in der Tafel entfernte Zahl, einerley Einheiten, Zehner und Hunderter haben müſſe, als die Zahl, von der man ausgeht, und daß folglich auch für den Fall, wo die drey Endzifern kleiner werden, als ſolche bey dem vorhergehenden Quadrate waren, dieſelben nicht in einerley Geſetz mit dem, in welches das Tauſend aus dem Gnomon fällt, liegen kann, ſondern nothwendig in ein zunächſt folgendes Geſetz von Tauſend fallen muß.

Und ſo dienen, aus ähnlichen Urſachen, die auf ſolche Art gefundenen erſten 5000 Quadrate, mit ihrem Perioden der vier Endzifern, zur Norm, für die erſten 50000 Quadrate; dieſe, mit ihren fünf Endzifern, wieder zur Norm für die erſten 500000 Quadrate, u. ſ. f. ohne Ende; wo-

bey man nichts weiter zu beobachten hat, als daß man nach und nach die Zahlen von 1 bis 9, als erhöhete Einheiten, nach ihrer Ordnung, das heißt hier, nach dem jedesmal vollendeten Perioden der Endzifern, zu der Claſſe ſetzt, die zunächſt auf die Endzifern des vorhabenden Perioden folgt, deren Steigen und Fallen in den einzelnen Stellen, man ſogleich und mit einem Blicke, nur aus einer oder zwo ſeiner höchſten Zifern, überſehen kann, damit man in dem letzten Falle, noch eine Einheit mehr hinzuſetze, als die fortſchreitende Ordnung der Quadrate an ſich erforderte. Kurz: die erſten 5^{n} Quadrate, mit ihrem Perioden der $n+1$ Endzifern, dienen zur Norm für die nächſtanliegenden $4\,5^{n}$ Quadrate, bey denen die erhöheten Einheiten $1^{n+1}, 2^{n+1} \ldots 9^{n+1}$, nach ihrer Ordnung, ſo wie jedesmal der Period der Endzifern ganz vollendet iſt, zu den $(n+2)$ten Ziferſtellen vom Ende der Zahlen, d, i. zu den Zifern der $(n+1)$ten decimal Ordnung des jedesmal vorhergehenden Quadrates, mit gehöriger Rückſicht des Steigens und Fallens der Endzifern des zu findenden nächſtanliegenden Quadrates, zugeſetzt werden müſſen; und ſo geben beyde zuſammen (die $5^{n} + 4\,5^{n}$ erſten Quadrate) die erſten 5^{n+1} Quadrate, als eine neue Norm, zu den nächſtanliegenden $4\,5^{n+1}$ Quadraten u. ſ. w.

Ich will noch ein Beyſpiel beyfügen, aus welchem man die Leichtigkeit dieſes mechaniſchen Verfahrens, auch für Quadrate gröſſerer Wurzeln, als die Ludolphiſche Tafel enthält, erſehen, und zugleich abnehmen wird, wie ſolches auch auſſer der Ordnung anzubringen ſey.

Geſetzt, man brauchte die Quadrate der Zahlen 469277 nach der Reihe bis mit 469288, oder noch weiter, ſo wird man ſogleich erſehen, daß, weil die Wurzel 469277 zunächſt kleiner iſt

iſt als $\overset{5}{5}$, das Quadrat dieſer und aller übrigen Wurzeln aus der Norm der erſtern $\overset{4}{5}$ Quadrate gegeben ſeyn wird. Man dividire alſo mit der Zahl 50000 in die gegebene Wurzel 469277, ſo wird der Quotient, der allemal eine einzelne Zahl (hier 9) ſeyn muß, die Zahl angeben, um welche man die 6ten Ziferſtellen, oder die Zifern der 5ten Ordnung der zugehörigen Quadrate ſucceſſive erhöhen muß; der Reſt 19277 aber, giebt die Wurzel zu dem Quadrate der Tafel, von welchem an, der Period der fünf letzten Endzifern für die zu ſuchen gegebenen Quadrate anfängt. Ob man nun gleich, zu augenblicklicher Findung dieſer Quadrate, nichts weiter als den zugehörigen Perioden dieſer Endzifern nöthig hat: ſo will ich doch, zu bequemer Vergleichung, den Fortgang der Quadrate von den Wurzeln 19277, 69277, 119277, ſämtlich bis auf ....88, mit den geforderten zugleich, angeben, die, allen gemeinſchaftlichen Endzifern, durch einen Doppelſtrich von den Anfangszifern abgeſondert, voran beyfügen, und die zu addirenden höhern Einheiten 0, $\overset{5}{1}$, $\overset{5}{2}$..... $\overset{5}{9}$, über die Colonnen ſetzen.

	0	$\overset{5}{1}$	$\overset{5}{2}$	....	$\overset{5}{9}$
..02729	3716..	47993..	142270..		2202209..
..41284	6..	4..	2..	ꝛc.	18..
..79841	6..	5..	4..		27..
..18400	7..	7..	7..	ꝛc.	37..
..56961	7..	8..	9..		46..
..95524	7..	9..	81..	ꝛc.	55..
..34089	8..	48001..	4..		65..
..72656	8..	2..	6..	ꝛc.	74..
..11225	9..	4..	9..		84..
..49796	9..	5..	91..	ꝛc.	93..
..88369	9..	6..	3..		302..
..26944	3720..	8..	6..		12..
	= 19288^2	= 69288^2	= 119288^2		= 469288^2

Die

Die vorgeſetzten Endzifern, bey denen das Steigen und Fallen, durch gemeine und curſiv Zifern, in ihren höchſten Stellen ſichtbar angemerkt worden iſt, ſind hier aus der aufſteigenden wachſenden Reihe der Quadrate der Wurzeln von 19277 bis 19288 genommen worden. Hätte man aber von dem Reſte 19277 noch den Diviſor 50000, abgezogen: ſo hätten die Quadrate, von dieſer Differenz, oder von der Wurzel — 30723 an, nach der Ordnung, aber wie ſchon das Zeichen lehrt, in abſteigender fallender Reihe, eben die Endzifern gegeben. Die Urſache hiervon iſt bereits gezeigt worden; denn was vorher von der Formel $(25n \pm m)^2$ für zwo Endzifern der Quadrate, deren Wurzeln in der Summe 50n betragen, behauptet worden iſt, das gilt nun auch, bey gehöriger Beſtimmung von n, was auch m iſt, für zwo, drey und mehrere Endzifern. Dieſe Bemerkung, nach welcher gewiſſe poſitive und negative Wurzeln, (deren Quadrate allemal den Quadraten der gleichgroſſen poſitiven Wurzeln gleich ſind) in den Endzifern ihrer Quadrate mit einander überein kommen, iſt nützlich, weil man dadurch die aus einer Tafel zu nehmenden Endzifern, mit Leichtigkeit und Sicherheit zuvor prüfen kann. Auch kann man, in vielen Fällen, durch dergleichen negative Wurzeln, die erforderlichen Endzifern ihrer Quadrate aus einer ſehr kleinen Tafel nehmen, die eine weit umfänglichere Tafel, aus den poſitiven Wurzeln, nicht geben würde.

Daß man den Nutzen der Endzifern der Quadrate nicht ganz verkannt hat, erhellet daraus, daß man ihre verſchiedene Form, bey zwey, drey, auch wohl vier Zifern, hier und da angemerkt hat. Sehr umſtändlich findet man ſolche in einer, bereits im vorigen Jahrhunderte, herausgekommenen Quadrat-Tafel der erſten Zehntauſend Wurzeln *.

Aber

* A Table of Ten thouſand Square Numbers. London, 1672. Auf der letzten und 32ſten Seite ſteht der Name *Iohn Pell* unterſchrieben.

Aber freylich kann man die bloſſe Form dieſer Endziffern, nach welcher es in allem von den einzifrigen 6erley, von den zweyzifrigen 22erley, von den dreyzifrigen 159erley, von den vierzifrigen 1044erley Arten giebt, nicht leicht weiter zu etwas brauchen, als daß man durch ſie, wie man immer gethan hat, Zahlen, die keine Quadrate ſind, von den Quadraten ausſchließt. Weit vortheilhafter aber iſt es, mit dieſer Form der Endzifern zugleich ihren Perioden zu ſuchen, den man, wie gezeigt worden iſt, durch Abzählen, ohne einmal die Quadratzahlen ſelbſt zu wiſſen, für ſo viel Endzifern als man will, leicht finden kann, weil Geſetze höherer Ordnungen ſich eben ſo leicht in der Tafel, als Zahlen höherer Ordnungen in dem dekadiſchen Syſtem, beſtimmen und überſehen laſſen. Ein unmittelbarer Nutzen ſolcher Endzifer-Perioden iſt unter andern dieſer, daß man die Richtigkeit bereits gedruckter Tafeln, in dieſen Zifern, leicht prüfen kann. Schon dieſe Prüfung zeigt augenſcheinlich, daß die Quadrattafel im zweyten Theile des vollſtändigen mathematiſchen Lexicons (Leipzig 1742) wegen der unglaublich vielen Druckfehler ganz unzuverläſſig ſey. Hat man nun einen ſolchen Perioden einmal, ſo kann man alle zugehörigen Zahlen, bis auf ſo weit, als berichtigt anſehen, und man wird nur noch den Fortgang derſelben, in den höhern Stellen dieſer Zahlen beſtimmen und aufſuchen müſſen. Wie das für die Quadrate geſchehen könne, iſt hier auf eine ſolche Art dargethan worden, die hoffentlich den Kennern ein Gnüge thun wird. Denn da man doch für jedes Quadrat Etwas thun muß: ſo ließe ſich leicht zeigen, daß das, was hier gefordert wird, ein Kleinſtes ſey.

Der itzt gezeigte Vortheil, welcher für die Quadrate ſo wichtig iſt, läßt ſich mit der gehörigen Anwendung, auch auf andere, mit den Quadraten nahe oder weitläuftig verwandte Zahlen, ohne Schwürigkeit übertragen; wie noch mit Wenigem gezeiget werden ſoll.

Das

Das Product jeder zwo, unmittelbar auf einander folgenden, natürlichen Zahlen $n-1, n, n+1$, wird eine Proniczahl genennet. Folglich ſind $(n-1)n$; $n(n+1)$ d. i. n^2-n, n^2+n, zwo nächſt auf einander folgende Proniczahlen, deren kleinſte Factoren $n-1$ und n, ihre Wurzeln genennet werden. Beyder Proniczahlen Differenz $2n$, giebt zu erkennen, daß dieſe Zahlen, eben ſo aus geraden Zahlen, als Gnomonibus, wie die Quadrate aus den ungeraden
0 Zahlen, durch Addition ſich finden laſſen: Folglich
2 könnte man ſie auch nach den geraden Zahlen, 0, 2, 4,
2 6, 8 .... aus der Tafel A, oder, weil die Proniczah-
4 zahlen, (von denen der eine Factor immer gerade iſt,)
6 lauter gerade Zahlen ſind, lieber nach den natürlichen
6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, als den Hälften dieſer Gnomo-
12 num, aus der Tafel B, hinter einander abzählen. Aber
8 die unmittelbare Anwendung des bey den Quadraten
20 gezeigten Vortheils, auch auf dieſe Zahlen, fällt zu
ꝛc. deutlich in die Augen, als daß man ihn bey Aufſuchung
derſelben übergehen könnte. Die Umſtändlichkeit, mit welcher ich ihn bey den Quadraten abgehandelt habe, überhebt mich jedoch der Mühe, ihn für die Proniczahlen, ſo wie für ihre Hälften die Trigonalzahlen $\frac{n^2+n}{2}$, d. i. für die Summen der natürlichen Zahlen, von 1 bis auf n, oder $n-1$, zu entwickeln. Man wird vielmehr, ohne Anſtoß, den Perioden der Endzifern für dieſe Zahlen in der Tafel B leicht abzählen, und das Geſetz, nach welchem die höhern Stellen, nach und nach, aus den *Gnomonibus* 100+2, 100+4... 200+2; 200+4;... 1000+2, 1000+4; .... 10000+2, 100000+4 ꝛc für die Proniczahlen anwachſen, ſo wie das, was bey ihnen anders ausfällt, als bey den Quadraten, von ſelbſt beſtimmen können. Die Proniczahlen, nach der Ordnung, von den Wurzeln 0 bis 100 ſind folgende:

0	110	420	930	1640	2550	3660	4970	6480	8190
2	132	462	992	1722	2652	3782	5112	6642	8372
6	156	506	1056	1806	2756	3906	5256	6806	8556
12	182	552	1122	1892	2862	4032	5402	6972	8742
20	210	600	1190	1980	2970	4160	5550	7140	8930
30	240	650	1260	2070	3080	4290	5700	7310	9120
42	272	702	1332	2162	3192	4422	5852	7482	9312
56	306	756	1406	2256	3306	4556	6006	7656	9506
72	342	812	1482	2352	3422	4692	6162	7832	9702
90	380	870	1560	2450	3540	4830	6320	8010	9900

Schon hier zeigt ſich bey dieſen Zahlen eine kleine Abweichung von dem, was bey den Quadraten iſt angemerket worden.

Der Period der beyden Endzifern der Proniczahlen erneuert ſich hier nach dem erſten Hundert Proniczahlen, und diejenigen Proniczahlen, deren Wurzeln in der Summe 100 oder 100n betragen, kommen in den beyden Endzifern mit einander überein, wie ſchon daraus erhellet, daß hier von der Proniczahl 2450 an, als einer gemeinſchaftlichen Gränze, einerley Endzifern, in auf- und abſteigender Ordnung auf einander folgen. Aus dieſem Wenigen, als einer Grundlage, läßt ſich das Uebrige für die Proniczahlen, aus dem, was bey den Quadratzahlen gezeigt worden iſt, mutatis mutandis, leicht folgern. Eine Proniczahlentafel würde zu einer bequemen Auswahl bey Eintheilungen durch einen Vernier, nützlich zu gebrauchen ſeyn.

Ich gehe nunmehro zu den Cubiczahlen fort, bey welchen ich noch kürzlich zeigen will, wie man

1) um ſolche auſſer der Ordnung zu finden, die natürlichen, geraden und ungeraden, die Quadrat- Pronic- Triangular- und andere Zahlen, verſchiedentlich und mit Vortheil gebrauchen, oder auch

2) ſie nach einer gewiſſen Ordnung, aus einander ſelbſt herleiten könne; alles in der Abſicht, um den Nutzen, und die genaue Verwandſchaft dieſer Zahlen, für welche ſich die

Metho-

Methode des Abzählens verſchiedentlich modificiren läßt, deutlich vor Augen zu legen.

Die Materie iſt hier ſo reichhaltig, daß es ſchwer wird, bey der Kürze, in welche ich mich einſchränken muß, eine gute Auswahl nur des Beſten und Brauchbarſten zu machen. Es wird immer darauf ankommen, wie man die Cubiczahlen in ſchickliche Factoren oder Summen zerlegen, die *Gnomones* derſelben durch bequeme Anordnung aus einander herleiten, und durch deren Addition, folgende Cubiczahlen aus vorhergehenden finden, und berechnen ſoll.

Die Formeln $n^3 = n \cdot n^2$; $n^3 = (n \pm m) \cdot n^2 \mp m n^2$, will ich übergehen. Der Vortheil der erſtern aus der Quadrattafel iſt nicht beträchtlich; und der Gebrauch der zwoten, kann nur in gewiſſen beſondern Fällen nützlich werden. Ungleich wichtiger zu der vorhabenden Abſicht ſind folgeude Formeln:

$$n^3 = \begin{cases} \left(\overline{n^2 - n + 1} + \overline{n^2 + n - 1}\right) \cdot \frac{n}{2} & \text{(I)} \\ \left([n - 1]\, n + n\, [n + 1]\right) \cdot \frac{n}{2} & \text{(II)} \\ \left(\frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 + n}{2}\right) \cdot n & \text{(III)} \\ (n^2 - n)\, n + n^2 & \text{(IV)} \\ \left(\frac{n^2 + n^2}{2}\right) - \left(\frac{n^2 - n}{2}\right)^2 & \text{(V)} \end{cases}$$

Die beyden Glieder, aus welchen der erſte Factor in I beſteht, ſind hier immer Proniczahlen ± 1, alſo ungerade Zahlen, von der geraden Differenz $2(n - 1)$. Vertheilt man alſo dieſe Differenz auf $n - 1$, nach dem erſten Gliede $n^2 - n + 1$, folgende Glieder, ſo bekommt man in allen n Glieder, die nach der Differenz 2 fortgehen, und von welchen $n^2 + n - 1$ das letzte iſt. Der Ausdruck I iſt alſo nichts anders, als die Summe von n auf einander folgenden, ſo-

genann-

genannten verkürzten ungeraden Zahlen (imparibus mutilis vel curtis) deren Anfang und Ende, für jede Cubiczahl, durch die Wurzel n allemal gegeben iſt. In der Formel II beſteht dieſer Factor aus zwo unmittelbar auf einander folgenden Proniczahlen, ſo wie in III aus zwo nächſten Trigonalzahlen. Die Formel IV verbindet Pronic- und Quadratzahlen mit einander, und der Ausdruck V zeigt endlich, wie man die Cubiczahlen aus der Differenz der Quadrate jeder zwo nächſt auf einander folgenden Trigonalzahlen, und folglich aus den Quadrattafeln, ſo weit ſolche dafür reichen, leicht und bequem finden könne. Hieraus wird folgende Berechnung der Cubiczahlen verſtändlich, bey welcher die Wurzeln den correſpondirenden Potenzen zur Seite, die römiſchen Zahlen aber über die Verticalreihen, wie ſolche nach den vorhergehenden Formeln darzu gehören, geſchrieben ſtehen:

Wurz.	I.	IV.	II.	III.	V.	Cubicz.
1)	1	$=0+1$	$=(0.1+1.2).\frac{1}{2}.$	$=(0+1).1$	$=1^2-0^2$	$=1=1^3$
2)	3 5	$=2+1$ $=2+3$	$=(1.2+2.3).\frac{2}{2}$	$=(1+3).2$	$=3^2-1^2$	$=8=2^3$
3)	7 9 11	$=6+1$ $=6+3$ $=6+5$	$=(2.3+3.4).\frac{3}{2}$	$=(3+6).3$	$=6^2-3^2$	$=27=3^3$
4)	13 15 17 19	$=12+1$ $=12+3$ $=12+5$ $=12+7$	$=(3.4+4.5).\frac{4}{2}$	$=(6+10).4$	$=10^2-6^2$	$=64=4^3$
5)	21 23 25 27 29	$=20+1$ $=20+3$ $=20+5$ $=20+7$ $=20+9$	$=(4.5+5.6).\frac{5}{2}$	$=(10+15).5$	$=15^2-10^2$	$=125=5^3$
	31	$=30+1$	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	
ꝛc.	ꝛc.					

Wie man höhere Cubiczahlen aus niedrigern nach der Ordnung, und auſſer der Ordnung, ſuchen, und bequem finden könne, wird folgendes zeigen.

Der allgemeinſte Gnomon aller um r Stellen von einander entfernten Cubiczahlen iſt, wie S. 46 gezeigt worden, $D' = 3n^2r + 3nr^2 + r^3$, welcher zu n^3, hinzugeſetzt, den Cubus von $n + r$ giebt. Man ſieht leicht, daß ſich hier eben die Beſtimmungen von r für die Cubiczahlen, wie dort für die Quadrate, machen ließen: ich will aber, weil der Weg hierzu im Vorhergehenden ſchon hinlänglich gebahnt iſt, um nicht zu weitläuftig zu ſeyn, von allen nur die einfachſte Vorausſetzung wählen, und ihren Gebrauch durch Beyſpiele erläutern.

Man ſetze $r = 1$, ſo verwandelt ſich D' in $3n^2 + 3n + 1$, und gehört als Gnomon zu der Cubiczahl n^3, zu welcher er hinzugeſetzt, den zunächſt gröſſern Cubus $(n + 1)^3$ giebt. Setzt man hier $D' = (n + 1)^2 + 2n^2 + n$, ſo ergiebt ſich hieraus $(n + 1)^3 = n^3 + (n + 1)^2 + 2n^2 + n$. Man findet alſo jede nächſtfolgende gröſſere Cubiczahl aus der vorhergehenden kleinern, wenn man zu dieſer kleinern, das Quadrat der größern Wurzel, das doppelte Quadrat der kleinern Wurzel, und die kleinere Wurzel ſelbſt, hinzuſetzt; woraus zugleich der Nutzen der Quadrattafeln bey den Cubiczahlen erhellet.

Wollte man z. E. den Cubus von 11 aus dem gegebenen Cubus von 10 ſuchen, ſo wäre hier $n = 10$,

alſo	n^3 oder 10^3	$= 1000$	und ſo könnte man, auf
ferner	$(n+1)^2$ = 11^2	$= 121$	eben die Art, die folgen-
	$2n^2$ = $2 . 10^2$	$= 200$	den Cubiczahlen, durch
	n = 10	$= 10$	bloſſe Addition ſchon ge-
alſo	$(n+1)^3$ oder 11^3	$= 1331$	gebener Zahlen, alſo ziem-

lich bequem, ununterbrochen nach einander finden.

Man kann aber auch, ohne die Quadrattafeln, die Cubiczahlen, ebenfalls durch Addition, und zwar noch leichter

finden.

finden. Denn weil D′ oder $3n^2 + 3n + 1 = 3(n^2 + n) + 1 = 6\frac{n^2 + n}{2} + 1$, ſo zeigt ſich hieraus, daß jeder, zunächſt auf n^3 folgende Cubus $(n+1)^3$, nach ſeiner Ordnung, um die dreyfache, zur Wurzel *n* gehörige, Proniczahl + 1, oder, welches einerley iſt, um die ſechsfache Trigonalzahl derſelben Wurzel, + 1, gröſſer ſey, als der vorhergehende.

Man ſetze alſo in dem Ausdruck $1 + \frac{(n^2 + n)}{2}.6$ nach und nach $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m-2, m-1$, ſo findet man

für	$n = 0$	den 1ſten	Gnomon	$= 1 + 0.6$
⸗	$n = 1$	⸗ 2ten	⸗	$= 1 + 1.6$
⸗	$n = 2$	⸗ 3ten	⸗	$= 1 + 3.6$
⸗	$n = 3$	⸗ 4ten	⸗	$= 1 + 6.6$
⸗	$n = 4$	⸗ 5ten	⸗	$= 1 + 10.6$
⸗	$n = m-2$	⸗ $(m-1)$ten	⸗	$= 1 + \left(\frac{m^2 - 3m}{2} + 1\right)6$
⸗	$n = m-1$	⸗ mten	⸗	$= 1 + \left(\frac{m^2 - m}{2}\right)6$

Der beyden letztern Gnomonum Unterſchied iſt $(m-1)6$, und ſo iſt denn

der mte Gnomon = dem $(m-1)$ten Gnomon $+ (m-1)6$

folglich, weil jeder Cubus aus dem nächſtvorhergehenden Cubus, mit Hinzuſetzung des zugehörigen Gnomons entſtehet, findet man

den mten Cubus $\begin{cases} = (m-1)\text{ten Cub.} + (m-1)\text{ten Gnom.} + (m-1)6 \\ = (m-1)\text{ten Cubus} + m\text{ten Gnomon} \end{cases}$

Die unmittelbarſte Anwendung hiervon wäre dieſe, daß man die Producte der dreyfachen Proniczahlen, oder der ſechsfachen Trigonalzahlen, durchgehends um 1 vermehrt, zu den Cubiczahlen, wie ſolche nach und nach aus einander ent-

entſtehen, in ihrer Ordnung addirte. Den Cubiczahlen könnte man die natürlichen, als Wurzeln, zur Seite mit beyfügen.

0)	0
	1 = 1
1)	1
	7 = 1 + 6
2)	8
	19 = 1 + 18
3)	27
	37 = 1 + 36
4)	64
	61 = 1 + 60
5)	125
	ꝛc.

Hierzu würde man die Pronic- oder Trigonalzahlen, nach der Reihe, im Voraus berechnen müſſen. Ob man nun gleich dieſe Zahlen bequem in der Tafel abmeſſen, ja, nach dem, was bey den Quadraten gezeigt worden iſt, ſie ſo gar mechaniſch finden kann: ſo werden doch die zu machenden Producte dieſer, in der Folge immer beträchtlicher anwachſenden Zahlen, als eine neue Arbeit, gar bald den Gedanken veranlaſſen, ſich hierbey nach einer Erleichterung umzuſehen. Dieſe bietet ſich auch, durch eine ſchickliche Anordnung und Zerlegung dieſer *Gnomonum*, wie folgendes zeigt, gleichſam von ſelbſt an.

A	B	C
0) 0	0) 0	0) 0
0] = 1 + 0.6	− 6 = − 1.6	1 = 0.6 + 1
1]	+ 7 = 1.6 + 1	0 = 0.6
1) 1	1) 1	1) 1
3] = 1 + 1.6	0 = 0.6	1 = 0.6 + 1
4]	7 = 1.6 + 1	6 = 1.6
2) 8	2) 8	2) 8
9] = 1 + 3.6	6 = 1.6	7 = 1.6 + 1
10]	13 = 2.6 + 1	12 = 2.6
3) 27	3) 27	3) 27
18] = 1 + 6.6	12 = 2.6	19 = 3.6 + 1
19]	25 = 4.6 + 1	18 = 3.6
4) 64	4) 64	4) 64
30] = 1 + 10.6	18 = 3.6	37 = 6.6 + 1
31]	43 = 7.6. + 1	24 = 4.6
5) 125	5) 125	5) 125
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Bey dieſer Berechnung iſt die Anordnung der zugehöri- gen Zahlen, ſo wie die überſchriebenen Buchſtaben auf einan- der folgen, immer einfacher und natürlicher. Ich will den Abſchnitt zwiſchen zwo horizontalen Linien, hier in ein Fach, und die darinnen enthaltenen Zahlen, nach ihrer Ordnung, die erſte, zwote, dritte Zahl nennen. Alle drey Anordnun- gen haben das mit einander gemein, daß die Cubiczahlen bey ihnen nach der Reihe, durchgängig aus der Summe dreyer Zahlen erwachſen, unter welchen ſie unmittelbar ge- ſchrieben ſtehen; aber in der Zerlegung der Gnomonum herrſcht hier die größte Verſchiedenheit. In A erwachſen die Gnomones immer aus der Summe zwoer, unmittelbar auf einander folgenden natürlichen Zahlen, daß man alſo hier nur eine, jedesmal um die Hälfte kleinere Zahl, als der Gnomon iſt, ſuchen darf; und da man die kleinſte von bey- den aus der ſucceſſive anwachſenden Progreſſionalſumme der arithmetiſchen Reihe 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18... leicht fin- den, oder in der Tafel abmeſſen kann, ſo verkürzt man ſchon dadurch den Aufwand an Zeit und Mühe beträchtlich. Dieſe Erſparniß wird aber bey B und C noch beträchtlicher. Denn wenn man in B die ſenariſche Progreſſion — 6, 0, 6, 12, 18, 24... von — 6 an, in die mittelſten Stellen, als zwote Zahlen; in C aber dieſelbe Progreſſion von 0 an, in die letzten Stellen der Fächer, als dritte Zahlen, in ununs terbrochener Folge, im Voraus einträgt: ſo darf man nur noch, in dem erſten Fache beyder Anordnungen, zu den Pro- greſſionsgliedern, — 6 in B, und 0 in C, die Zahlen, + 7 in B, und 1 in C, als Complemente des erſten Gnomons, in beyden hinzuſchreiben, ſo wird man dadurch, nach und nach, dasjenige was den vorher eingeſchriebenen Gliedern der ſena- riſchen Progreſſion, zu den aus ihnen erwachſenden Gnomo- nibus, in allen folgenden Fächern noch fehlt, ſogleich durch Addition finden, und in die zugehörigen Stellen eintragen können. So geben, jedes letzte Glied eines Faches in B, zu

dem mittelſten Gliede des folgenden Fachs hinzugeſetzt, das letzte Glied dieſes folgenden Faches; die Summe der beyden letzten Glieder eines Fachs in C, das mittelſte Glied des folgenden Faches; und die Summe aller drey Glieder eines Fachs in B und C, das erſte Glied oder den Cubus des folgenden Fachs. Daß die beyden erſtern, auf ſolche Art gefundenen Zahlen, die zugehörigen Ergänzungen der Gnomonum nothwendig ſeyn müſſen, legen die beygefügten Producte dieſer Zahlen deutlich vor Augen.

Bey dem Verfahren in B und C ſchreibt man alſo immer den einen Theil des Gnomons durch die ſenariſche Progreſſion im Voraus ein, und ſucht dazu den andern Theil, ohne Schwierigkeit, durch Addition. Aus beyden Theilen, mit dem zugehörigen vorhergehenden Cubus, alſo immer aus drey Gliedern, findet man den folgenden Cubus. Kann man nun die zu addirenden Theile in ein Fach zuſammen bringen, und zugleich den Cubus nur aus zwo Zahlen zu addiren anweiſen: ſo wird die Berechnung dieſer Potenzen dadurch noch beträchtlicher erleichtert. Wie das geſchehen könne, wird folgende Anordnung zeigen:

	D	
0)	0	c
	1	g
	6	s
1)	1	c
	7	g
	12	s
2)	8	c
	19	g
	18	s
3)	27	c
	37	g
	24	s
4)	64	c
	61	g
	30	s
5)	125	
	ꝛc.	

Durch die zur Seite beygefügten Buchſtaben c, g, s, werden hier die Wörter: Cubus, Gnomon, ſenariſches Progreſſionsglied verſtanden; denn auch hier wird die Progreſſion 6, 12, 18, 24, 30 .... von 6 an, in die letzten Stellen der Fächer, Glied vor Glied, nach der Ordnung, ſo wie auch die Zahlen 0, 1, in dem erſten Fache, im Voraus eingeſchrieben. Das iſt genug, alle übrige Gnomones und Cubes, durch Addition zwoer Zahlen, nach Anweiſung der Klammern, aus einander herzuleiten. Jedes g + s eines Faches, giebt ein neues g in dem folgenden Fache, und eben ſo jedes c + g ein neues c.

Die

Die erſte Erfindung, die Cubiczahlen aus ihren und ihrer Gnomonum beſtimmten Differenzen rückwärts zu ſummiren, ſchreibt Clavius*) dem Jeſuiten Joh. Baptiſta Villalpandus zu. Die dabey beobachtete Anordnung der zu ſummirenden Theile wird aber durch gegenwärtiges erweitert und verbeſſert. Daß die ſenariſche Progreſſion in B von — 6, in C von 0, in D von + 6, anfängt, zeigt deutlich, welche Mannichfaltigkeit ſich bey dieſer Berechnung noch weiter anbringen lieſſe, ſo, das auch die Gnomones, wie ihre Elemente, die einzelnen Progreßionsglieder, Negativzahlen werden könnten. Die Vortheile einer ſolchen Anordnung erſtrecken ſich jedoch nicht allein auf Quadrat- und Cubiczahlen; ſondern es laſſen ſich überhaupt alle Potenzen m, aus ihren Differenzreihen, bey denen man zuletzt immer auf beſtändige Gröſſen kommt, wieder rückwärts ſummiren. Den allgemeinen Ausdruck dieſer Reihen der Unterſchiede, für jede Potenz, hat Herr Hofrath Käſtner**) mit der Ihm eignen Gründlichkeit und Präciſion zu finden angewieſen.

Ungefähr auf eine ähnliche Art wie in D, hat der Herr von Schönberg ſeine Einrichtung für die von ihm veranſtaltete Berechnung der Cubiczahlen getroffen. Dabey hat er die Stellung dieſer Zahlen ſo angeordnet, daß ſich die Potenzen, in der Ordnung und Lage, wie ſolche in der Tafel ſelbſt abgedruckt werden ſollen, ergeben. Jeder Bogen enthält die Berechnung von 500 Cubiczahlen. Bey jeden, um 100 Stellen von einander entfernten, ſenariſchen Progreßionsgliedern, *Gnomonibus* und *Cubis*, kommen die beyden Endzifern unter ſich überein. Fünfhundert nach einander folgende Progreſ-

*) Geometria practica p. 388, 389.

**) Analyſis endl. Größen S. 158. u. f. Man vergleiche hiermit die allgemeinen Formeln der Differenzen und Summen S. 406. und die daraus hergeleitete Unterſuchung der figurirten Zahlen. Ebendaſ. S. 418. u. f.

ſionsglieder beſtimmen einen Perioden von drey Endzifern; eben ſo viel Cubiczahlen gleichfalls einen Perioden von drey, bey den geraden Potenzen, aber nur einen Perioden von zwo Endzifern, bey den ungeraden. Die Specialvortheile gewiſſer einzelnen Potenzen, und die für ſolche im Voraus eingedruckte Zifern, die in bequemen Diſtanzen beygefügten Anweiſungen und Wegweiſer, ſo wie alle übrigen dabey angebrachten Kunſtgriffe, nach welchen einige Zifern bey der Berechnung ganz übergangen werden, andere gar weggelaſſen ſind, indem ſich ſolche nach dem Decimalſyſtem von ſelbſt ergeben, muß ich hier übergehen. Eine umſtändliche Anzeige dieſer Einrichtung, wird zu ſeiner Zeit und am gehörigen Orte, gegeben werden.

Bey B, C und D hat man zu Erfindung der Cubiczahlen nur die einzelnen Glieder der Progreßion 0, 6, 12, 18, 24, 30... nach der Ordnung, in die auf einander folgenden Fächer, einſchreiben dürfen. Folgendes wird zeigen, daß man ſich hierzu auch der ſucceſſive anwachſenden Progreßionalſummen 0, 6, 18, 36, 60, 90... aus obiger Reihe, mit Vortheil bedienen könne.

E	F
0) 0; —269 +270	10) 1000; 331 000
1) 1; —209 +216	11) 1331; 391 006
2) 8; —149 +168	12) 1728; 451 018
3) 27; —089 +126	13) 2197; 511 036
4) 64; —029 +090	14) 2744; 571 060
5) 125;	15) 3375;

In den Colonnen E und F ſind alle Cubiczahlen von den Wurzeln 0 bis 20 nach der Reihe berechnet. Man ſetze in Gedanken die Colonne E auf F, ſo, daß der Cubus 1000 in E auf den Cubus 1000 in F zu liegen kommt, ſo kann man hier 1000 als eine Gränze anſehen, von welcher an, die vorerwähnten Glieder 0, 6, 18, 36, 60, 90, 126, 168, 216, 270.. in den zugehörigen Fächern, nach einerley Ordnung, auf- und abwärts ſteigen.

Die mittlern Zahlen der Fächer wachſen, ſo wie man in den Colonnen

E		F	
5)	125;	15)	3375;
	031		631
	060		090
6)	216;	16)	4096;
	091		691
	036		126
7)	343;	17)	4913;
	151		751
	018		168
8)	512;	18)	5832;
	211		811
	006		216
9)	729;	19)	6859;
	271		871
	000		270
10)	1000;	20)	8000;

nen herunter ſteigt, um 60 regelmäſſig fort, und darf man nur immer ihre Zehner um 6 Einheiten ihrer Art, nach der Ordnung, erhöhen. Auch fällt hier, nach dem Cubus 125, der ſehr kleine Period 31, 91, 51, 11, 71, der beyden letzten Zifern dieſer Zahlen, deutlich in die Augen, woraus ſich der Mechanismus derſelben in den Hunderten, und, auf ähnliche Art, in den Tauſenden, u. ſ. w. für ſteigende und fallende Endzifern von ſelbſt ergiebt.

Hierbey bleibt noch eine Schwürigkeit zurück, wie man nehmlich die einzelnen Glieder der Progreßionalſummen 0, 6, 18, 36... bequem und ſicher finden könne.

Bey Auflöſung derſelben will ich zugleich zeigen, wie ſich aus den zehn erſten, aber um 1 vermehrten Gliedern dieſer Reihe, d. i. aus den zehn erſten *Gnomonibus*, durch Addition der vorhergenannten, mechaniſch fortgehenden, aber um 1 verminderten, Zahlen, alle übrige Gnomones, nach ihrer Ordnung, ſogleich und ohne Schwürigkeit finden laſſen.

1) 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271(10
330, 390, 450, 510, 570, 630, 690, 750, 810, 870
11) 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141(20
930, 990, 1050, 1110, 1170, 1230, 1290, 1350, 1410, 1470
21) 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2641(30
1530, 1590, 1650, ꝛc. ꝛc. ꝛc.
31) 2791
2130
41) 4921

Bey dieſen, auf ſolche Art geordneten Gnomonibus, fällt das Geſetz der in den Horizontalrei-

41)	4921
	2730
51)	7651
	3330
61)	10981
	2930
71)	14911
	4530
81)	19441
	5130
91)	24571
	ꝛc.

hen nach 60, in den Verticalreihen nach 600, fortgehenden Hülfszahlen, deutlich in die Augen. Die Gnomones kommen hier ſprungweiſe, von zehn zu zehn, in den Verticalreihen, zum Vorſchein. Man kann ſie aber auch, nach jeder andern beliebigen Diſtanz, auſſer der Ordnung, finden. Denn wenn man in dem Ausdrucke des mten Gnomons $3m^2 - 3m + 1$, die Zahl m nach und nach um d, 2d, 3d u. ſ. w. wachſen läßt, ſo findet man hieraus der erſten Differenzreihe erſtes Glied $= 6md + 3d^2 - 3d$; der zwoten Differenzreihe erſtes, ſo wie alle übrigen Glieder $= 6d^2$. Geſetzt man brauchte von dem 31ſten Gnomon an, alle um 100 Stellen von einander entfernte Gnomones, ſo wäre für dieſen Fall hier $m = 31$; $d = 100$;

$$\text{alſo } 3m^2 - 3m + 1 = 2791$$
$$6md + 3d^2 - 3d = 48300$$
$$\text{und } 6d^2 = 60000$$

Man addire alſo zu dem 31ſten Gnomon 2791, die Zahl 48300, ſo kommt der 131ſte Gnomon, und ſo die übrigen, wenn man jedesmal die zuletzt addirte Zahl um 60000 erhöhet, und ferner addiret, wie folget:

2791	= 31ſte Gnomon
48300	
51091	= 131ſte Gnomon
108300	
159391	= 231ſte Gnomon
168300	
ꝛc.	ꝛc.

Das ſo regelmäſſige Wachsthum der Hunderter, Tauſender Zehntauſender ꝛc. der Hülfszahlen, dieſer ſprungweiſe fortgehenden Gnomonum, giebt zu dem Gedanken Anlaß, das Geſetz der Fortſchreitung für die Gnomones, ſo wie vorher für die Quadrate, aufzuſuchen. Hierzu würde der Period der beyden Endzifern in den erſten hundert, der Period von drey Endzifern in den erſten tauſend, der Period von vier Endzifern in den erſten zehntauſend Gnomonibus

bus u. ſ. w. nützlich ſeyn. Die erſten hundert Gnomones würden nehmlich die nächſten 900, die erſten, auf die Art gefundenen tauſend Gnomones, die nächſten 9000, und überhaupt die erſten 1^{n+2} Gnomones die nächſten 9^{n+2} Gnomones, berichtigen. Steigende und fallende Endzifern, würden auch hier, eben ſo wie bey den Quadraten, in Betrachtung kommen, und im letztern Falle würde man, die zu den höhern Stellen hinzu zu ſetzenden Zifern (die hier nicht, wie bey den Quadraten, in natürlicher Ordnung, von 1 an bis auf 9, ſondern nach der Progreßion 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, bey jedem neuen Hunderte, Tauſende ꝛc. mit allen für die mittlern Stellen dazwiſchen fallenden Zahlen anwachſen) um eine Einheit ihrer Art zuvor erhöhen müſſen. Wie das durch eine bey dieſen Endzifern bequem anzubringende Bezeichnung am füglichſten geſchehen und dadurch zugleich das Addiren zwoer Zifern erleichtert werden könne, hier zu zeigen, würde mich zu mehrern Weitläuftigkeiten führen, als die Kürze der Zeit und des Raums verſtattet. Es mag itzt genung ſeyn, den Weg darzu eröffnet zu haben; was ſich daraus für die Cubiczahlen folgern läßt, wird man nunmehro leicht ſelbſt finden können.

Die Form der cubiſchen Endungen zu zwo und drey Zifern, aber nicht ihre Anordnung nach Perioden, findet man in einer kleinen zu Deſſau heraus gekommenen Abhandlung*) S. 11 und 18 eingedruckt. Der erſtern giebt es in allem 63, der letztern aber 505 verſchiedene Arten. Der Verfaſſer dieſer Schrift iſt hier einen Schritt weiter gegangen, als ſeine Vorgänger, und hat den Vortheil einer ſolchen Form auf die Ausziehung der Wurzeln, aber nur aus Rationalcubiczahlen, erſtreckt. Verbindet man aber die Form der

*) A. C. v. H. (v. Happe) ganz neu entdeckte Art, aus ieder Cubiczahl, welche nicht über 100 Billionen geht, die Cubicwurzel zu erforſchen ꝛc. Deſſau 1755.

der Endzifern mit ihren Perioden, ſo kann man für dieſen und viele andere Fälle noch weiter gehen.

V.

Nutzen der iu Fächer eingetheilten Colonnen. Verſetzung und Verbindung gegebener Dinge. Verſchiedene Zahlengebäude; das dyadiſche, triadiſche, tetradiſche und andere. Rhabdologiſche Rechnungen. Additions- und Subtractionsſcalen. Anwendung der Methode auf gebrochene Zahlen; auf Decimal- und Sexageſimal-Brüche, und Berechnung des Canonis Sexagenarum. Entwickelung gemeiner und Sexageſimalbrüche in Decimalbrüche. Weitere Nachricht wegen der zukünftig herauszugebenden Factorentafel. Beſchluß.

Der Grund, auf welchen die Möglichkeit beruhet, daß man eine ſo erſtaunlich und unbeſtimmlich große Anzahl von Begriffen, als die Zahlen enthalten, durch ſo wenig Zeichen ausdrücken kann, beruhet einzig und allein auf den ſo mannigfaltigen Verbindungen (combinatio) und Verſetzungen (permutatio) dieſer Zeichen, und den daraus fließenden Ordnungen derſelben, in ihren verſchiedenen Stellen. Es wird daher nicht überflüßig ſeyn, den Nutzen der Fächer für beyde Fälle noch mit Wenigem zu berühren.

Wie man alle mögliche Verſetzungen einer gegebenen Menge von Dingen, a, b, c, d... leicht finden und berechnen könne, hat unter andern auch Herr Hofrath Käſtner*) gezeigt, und erwieſen, daß bey n Dingen die Zahl ihrer Verſetzungen $n.n-1.n-2\ldots 3.2.1$ ſeyn wird. Die daſelbſt gebrauchten Schlüſſe laßen ſich unmittelbar auf die Fächer übertragen; indem ſelbige die Stellen, in welche die Dinge nach ihren Ordnungen geſetzt werden müſſen, bequem auszeichnen und von einander abſondern. Zwey Dinge a, *b* haben zwo Ordnungen a*b*; *b*a;

a	*b*
b	a

das hat keine Schwürigkeit. Für drey Dinge a, b, c, nehme man in der Tafel Dd drey

*) Anal. endl. Größen §. 51. S. 25, 26.

drey neben einander liegende Verticalreihen, ſchreibe das letzte Ding *c* hinter einander, in das dritte Fach der erſten wagerechten Reihe, in das zweyte der zwoten, und in das erſte der dritten, alſo nach der Diagonale im Voraus ein, und trage die Buchſtaben der erſten Ordnung a b, der noch übrigen zwo Dinge, wie ſie liegen, in die leeren Fächer neben *c* ein. Man wiederhole das Einſchreiben von *c* nach der Diagonale, ſo wie auch der Buchſtaben b a der zwoten Ordnung, in die leeren Fächer neben *c*, ſo liegen die ſechs möglichen Ordnungen von drey Dingen in den ſechs Horizontalreihen gerade unter einander.

a	b	c
a	c	b
c	a	b
b	a	c
b	c	a
c	b	a

Eigentlich hätte man hier nicht mehr, als die erſten drey wagerechten Reihen nöthig gehabt, weil dieſe, rückwärts geleſen, die noch ermangelnden drey Ordnungen hinzuſetzen. Die Methode iſt übrigens leicht, und giebt die Verſetzungen geſchwind und ſicher. Indeſſen muß man doch, n Dinge zu verſetzen, die Verſetzungen von n — 1 Dingen zuvor wißen. Wie man die Verſetzungen, independent von den vorhergehenden, finden könne, will ich noch in einem Beyſpiele von 4 Dingen a, b, c, d, zeigen, aber zu Erſparung des Raums die Fächer hier weglaſſen:

abcd	*a*
bcda	*b*
cdab	*c*
dabc	*d*
acdb	*a*
cdba	*c*
dbac	*d*
bacd	*b*
adbc	*a*
dbca	*d*
bcad	*b*
cadb	*c*

Man ſchreibe die Dinge a b c d, wie ſie gegeben worden ſind, in der erſten Zeile neben einander, und füge hinter dem Verticalſtriche noch das erſte Ding *a* bey; von da an ſetze man die erſte Ordnung der Dinge im Kreißlaufe fort, bis nach der vierten Zeile die Buchſtaben hinter dem Striche, dieſe Ordnung wieder geben; welches zugleich eine Probe ſeyn wird, daß man ſich dabey

nicht verſehen hat. Nimmt man nun, mit Ueberſpringung des zweyten Dinges b, eine neue Ordnung a c d b; und nachher, mit Ueberſpringung von c, wieder eine andere a d b c, die man beyde nach ihrer Ordnung, von dem erſten Gliede a an, hinter dem Striche, im Kreislaufe durcharbeitet: ſo bekommt man hier in allem 12 von einander verſchiedene Ordnungen, welche, nach Anleitung der beygeſetzten Zeichen vor und rückwärts geleſen, die möglichen 1.2 3.4 = 24 Verſetzungen nach der Reihe geben werden. Wie man ſich bey 5 oder mehrern Dingen zu verhalten habe, wird man nunmehr, ohne Schwürigkeit, ſelbſt finden können.

Auf eine ähnliche Art findet man auch die Combinationen, Conternationen, Conquaternationen ꝛc. oder überhaupt die Verbindungen gegebener Dinge, nach einer gewißen Anzahl. Hierbey können verſchiedene Fragen vorkommen. Die gewöhnlichſte iſt: wie vielmal q Dinge aus n Dingen genommen werden können? Die Antwort auf dieſe Frage giebt die Formel $\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.\ 2\ldots\ q}$*. Dieſe Formel beantwortet, aber nur zum Theil, die möglichen Anordnungen der Zifern in der natürlichen Zahlenreihe, nach zwo, drey und mehr Zifern; denn hier kommen mit den möglichen Verbindungen dieſer Zifern, auch zugleich alle mögliche Verſetzungen derſelben, mit in Betrachtung, noch mit dem Zuſatze, daß eine Sache, oder ihr Zeichen, auch mehr als einmal vorkommen könne: wodurch denn dieſe Frage offenbar verwickelter wird als die erſte.

Ich will die Beantwortung derſelben, ſo wie ſich ſolche ſogleich, aus einem Geſetze der Tafel A, für jede zwey Zeichen aus zehn, ergiebt, hier beyfügen:

Man nehme in der Tafel A das Geſetz A von 00 bis 99, und ziehe durch die Fächer 00 und 99, und alle dazwiſchen fallen=

*) Käſtn. Anal. endl. Größen §. 740. 741. S. 227.

fallende, eine Diagonale: ſo iſt klar, daß dieſe Diagonale durch alle Fächer der Zahlen gehen wird, für welche die eingeſchriebenen Zeichen beyde einander gleich ſind. Von den, auf ſolche Art, abgeſonderten beyden Theilen, nenne man den obern A, den untern B, ſo giebt A, oder auch B, alle mögliche Verbindungen nach zwey Zeichen aus zehn, bey denen aber nie zwey gleiche beyſammen ſtehen, und zwar giebt A, wenn man hier die Zeichen als Zahlen, nach ihrem Werthe, betrachtet, die kleinern, und B die größern Verbindungen oder Zahlen; A und B zuſammen, geben alle mögliche Verbindungen nach zwey verſchiedenen Zeichen, zugleich mit allen möglichen Verſetzungen derſelben; ſetzt man hierzu noch die Verbindung der Zeichen, durch deren Fächer die Diagonale geht: ſo geben dieſe Fächer, mit den Fächern in A und B, zuſammen, alle mögliche Verbindungen, mit allen möglichen Verſetzungen, jeder zwo, gleichen oder ungleichen, Zeichen, aus zehn, von einander verſchiedenen Zeichen.

Die beyden Theile A und B haben in dem Geſetze A eine triangnläre Geſtalt, und ſo führt das bloße Anſchauen hier auf Triangularzahlen $\frac{n^2 + n}{2}$, wenn man die Menge der Verbindungen in A oder B ſuchen will. Für beyde iſt hier $n=9$, die Seite des gleichſchenklichten, (eigentlich gleichſeitigen) Triangels, und zugleich die Wurzel der Trigonalzahl $A = \frac{81 + 9}{2} = 45 = B$. Eben ſo giebt A + den Diagonalfächern, die Zahl $45 + 10 = 55$, oder die zehnte Trigonalzahl, für $n = 10$; A + B giebt, den zugehörigen Werth 9 für n geſetzt, $n^2 + n = 81 + 9 = 90$; und A + B + den Diagonalfächern, die Zahl $100 = n^2$, für $n = 10$.

Hieraus folgt alſo die Berechnung der Verbindungen und Verſetzungen zweyer, gleichen oder ungleichen, Zeichen

aus

aus zehn, ohne Schwierigkeit. Auch ſieht man zugleich, wie das, was hier für zwey Zeichen geſagt worden iſt, auf drey und mehrere Zeichen, mit den zugehörigen Beſtimmungen dafür, ſich anwenden läßt, wenn man z. E. für drey Zeichen aus zehn, die Zahlen nach ihrer natürlichen Ordnung von 000 bis 999 in Geſetze ſchreibt, oder das, was daraus folgt, aus einer leichten Berechnung aufſucht. Man wird dabey, nicht ohne Vergnügen, wahrnehmen, daß ſich die Lehre von den Combinationen und Permutationen, auf eine ſehr einfache Art, aus den in natürlicher Ordnung, bis auf eine gewiſſe Gränze, fortgeſetzten Zahlen, deren Gliederzahl man immer ſchon im Voraus weiß, herleiten, und das, was nicht zu der vorgegebenen Frage gehört, bequem davon abſondern, ſo wie das mehrere leicht hinzuſetzen ließe. Hierbey darf man den Vorwurf nicht befürchten, daß die Fortſchreitung der Zahlen ſich ganz eigentlich auf die Verſetzungs- und Verbindungsgeſetze gründe. So gewiß dieſes iſt, ſo ſchreibt doch jeder gemeine Rechner, ohne etwas von Combinationen oder Permutationen zu wiſſen, die Zahlen nach der Ordnung, ſo weit man verlangt, richtig fort; auch findet man ſolche, mit gehöriger Vorſchreibung der Hunderter, die, wie die ſchon vorher berichtigten natürlichen Zahlen ſelbſt, fortgehen, in der Tafel A ſchon ſo weit ausgedehnet fertig, als man will. Man kann alſo die Zahlenreihe im Voraus als bekannt annehmen, wenn man nur in der Folge zeigt, daß die Begriffe der Combinationen und Permutationen, und ihre Verbindung mit einander, nichts anders fordern, als was in der Zahlenreihe auf die Art ſchon befolgt worden iſt. So hat Jacob Bernoulli das von ihm erwieſene Geſetz der figurirten Zahlen, auf das Geſetz der Summen und Differenzen angewendet: Herr Hofrath Käſtner hat aber dieſen Vortrag umgekehrt. *)

Eben

*) Anal. endl. Größen §. 734. S. 422.

Eben dieſer Bernoulli hat auch die Permutationen und Combinationen am ausführlichſten abgehandelt *).

Hier iſt durchgängig vorausgeſetzt worden, daß der gegebenen, durch Combination und Permutation zu verändernden und zuſammen zu ſetzenden Dinge oder Zeichen, in allem zehn ſind. Wären dieſer Dinge mehr oder weniger, ſo würde man für ſie auch mehr oder weniger Zeichen brauchen. Die Verbindung dieſer Zeichen, wenn man ſie als Zahlen betrachtete, würde jedoch die Zahlen alsdenn anders geben, als in dem Decimalſyſtem; und ſo würde dieſe Betrachtung, auf eine ungezwungene Art, zu der Erfindung verſchiedener Zahlengebäude führen, wenn man auch noch nie darauf gedacht hätte.

Bemerkungswürdig iſt es, daß nach der getroffenen Einrichtung, alle Zahlengebäude, die nicht mehr als zehn Zeichen haben, in der Tafel A, zugleich mit dem Decimalgebäude, klar und deutlich vor Augen liegen. Man kann ſie aus dieſem ſogleich machen, wenn man aus den Decimalgeſetzen diejenigen Zahlzeichen wegſtreicht, die in dem geforderten Syſteme nicht vorkommen. Da man hierbey vorausſetzt, daß die einzelnen Zahlzeichen immer in der Ordnung und Bedeutung der Zeichen 0, 1, 2, 3... bis auf die höchſte Zahl des zu findenden Syſtems bleiben, und in allen Syſtemen auf einerley Art mit einander verbunden werden: ſo fallen hier alle wegzuſtreichenden Zeichen, mit ihren Verbindungen, in Eine verticale, und eben ſo auch in Eine horizontale Reihe, deren Durchſchnitt den Winkel der Lage nach beſtimmt, innerhalb welchen das Geſetz des neuen Syſtems ganz zu liegen kommt.

Durchſtreicht man z. E. in dem Geſetze A die beyden äuſſerſten, rechter Hand und unterwärts liegenden Reihen, ſo giebt das, in dem durchſtrichenen Gnomon liegende Parallelogramm

*) Iac. Bernoulli Ars coniectandi; Pars II. p. 72. ſeqq.

logramm $:\begin{matrix}00..08\\80..88\end{matrix}:$ das Geſetz für ein Syſtem von neun Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, das zweyte, in dem nächſtanliegenden Gnomon enthaltene Parallelogramm $:\begin{matrix}00..07\\70..77\end{matrix}:$ das Geſetz für ein Syſtem von acht Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, und ſo weiter bey den übrigen Zahlengebäuden.

Daß man durch Anſetzung neuer Gnomonum an das Decimalgeſetz, durch Einſchreibung der dahinein gehörigen Zeichen und ihren Verbindungen, auch größere Zahlengebäude von mehrern Zeichen, leicht machen könne, bedarf keiner Erinnerung. Hierzu würde man die Tafel D d brauchen können. Auf ihr läßt ſich, wenn man ſie ganz erſchöpfen will, das Geſetz für ein Zahlengebäude von vierzig verſchiedenen Zeichen anordnen.

Die Geſetze für kleinere und größſere Syſteme, als das Decimalſyſtem iſt, können, für die daraus entſpringenden Zahlen, auf eben die Art, wie die dekadiſchen Geſetze, behandelt werden. Nur fordert bey einer weit ausſehenden Arbeit die Bequemlichkeit, daß dieſe Geſetze auch ſo unmittelbar, wie in der Tafel A, bey dem dekadiſchen Syſteme, an einander anliegen, wie aus folgenden zu erſehen iſt; wo die über die Seitenſtriche den Geſetzen vorzuſchreibenden Anfangszahlen, nach der Ordnung der Zahlen des Syſtems, ohne Schwierigkeit, auf einander folgen, indem man die Anfangszahlen der folgenden Geſetze, aus den an und eingeſchriebenen Zahlen der vorhergehenden, wie bey dem Decimalſyſtem, alſo auch hier, nur abſchreiben darf.

	1	10
0	00	01
	10	11
1	00	01
	10	11
10	00	01
	10	11
11	00	01
	10	11
100	00	01
	10	11
101	00	01
	10	11
110		

	1	2	10
0	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
1	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
2	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
10	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
11			

	1	2	3	10
0	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
1	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
2	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
3				

Das erſte Syſtem ſtellt das dyadiſche vor, welches man insgemein mit Leibnitzen, für den Schlüſſel der Chineſiſchen Cova in dem Buche Ye=Kim ausgiebt. Das zweyte iſt das triadiſche Syſtem, das man auch das poettarrarorinkuroactiſche *) der Yameroer, an dem Amerikaniſchen Tigris nennen könnte; das dritte endlich iſt das Weigeliſche ſo genannte tetractiſche, oder analogiſcher, tetradiſche Syſtem der alten Thracier. Von dieſen und andern Syſtemen beſonders zu handeln, iſt hier der Ort nicht. Gewiß iſt es, daß ſie bey Aufſuchung und Unterſuchung der Zahlen, mannichfaltige Vortheile verſchaffen, die nunmehr durch die Art, wie ich hier angewieſen habe, die Zahlen dieſer Syſteme, mit größter Geſchwindigkeit, nach ihrer Ordnung, ſo weit man nur will, darzuſtellen, in vielen Fällen, theils von ſelbſt deutlicher in die Augen fallen, theils leichter zu finden ſind, als wenn man die Zahlen nicht vor ſich hat. Ob man für dieſe Syſteme die dekadiſchen Zeichen, wie hier geſchehen iſt,

*) S. Condamine Relation abregée d'un Voyage daus l'interieur de l'Amérique meridionale. Paris, 1745.

beybehalten, oder andere für ſie wählen will, iſt an ſich ganz gleichgültig. Beydes kann in gewiſſen Fällen vortheilhaft, in andern nachtheilig ſeyn. So gab hier die Beybehaltung der Zeichen, aus dem dekadiſchen, ſogleich alle übrige kleinere Syſteme; dahingegen, bey Vergleichung der Zahlen aus verſchiedenen Syſtemen, einerley Zeichen oft unbequem fallen würden. Ich ſage oft, nicht durchgehends, weil es Fälle giebt, wo man auch hier, einerley Zeichen mit groſſem Nutzen beybehalten kann.

Das dekadiſche Zahlengebäude braucht, ſelbſt für ſehr groſſe Zahlen, nur wenig Zifern, aber die arithmetiſchen Operationen in ſelbigen für dergleichen Zahlen, werden oft ſehr beſchwerlich. Das dyadiſche Syſtem braucht viel Zifern, auch nur für mittelmäſſig groſſe Zahlen, dafür ſind hingegen ihre Operationen äuſſerſt leicht. In beyden Syſtemen haben die Zifern der Zahlen, die ſie ausdrücken, ihre beſtimmt angewieſene Stelle, und ſtehet alſo hierinn, die Rechnung mit Zahlen überhaupt, der Rechnung mit Buchſtaben weit nach, in welcher man die Elemente der Gröſſen mit gröſter Freyheit, nach Gefallen, verſetzen kann. Ein Syſtem alſo, das dieſe Vortheile, ſo viel möglich zuſammen, mit Vermeidung der nur gedachten, oder anderer gleichgroſſen Unbequemlichkeiten, in ſich verbände, würde unſtreitig das vollkommenſte ſeyn. Einen leſenswürdigen Vorſchlag zu einem ſolchen Syſtem, und dafür nöthigen Algorithmen, deſſen Ausführung, und weitläuftige Anwendung auf Beyſpiele, auch auf theilbare und untheilbare Zahlen, hat Herr Beguelin in den Abhandlungen der königlichen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Berlin ohnlängſt gegeben *).

Ich gehe zu der Erklärung der Abſicht und des Nutzens der übrigen, auf dem Bogen D befindlichen Colonnen, fort.

Daß

*) Eſſais ſur un Algorithme, déduit du Principe de la raiſon ſuffiſante Nouv. Mem. de l'Acad. des Scienc. p. 296. Berlin, 1774.

Daß man aus III oder IV ſogleich einen ſo genannten Chineſiſchen oder auch einen Römiſchen Rechentiſch ſich machen könne, wird jedem, dem die Einrichtung von beyden auch nur ſo weit, als Leupold *) ſolche giebt bekannt iſt, in die Augen fallen. Eben ſo können ſie auch zu der, in dem ſechzehnden und ſiebzehnden Jahrhunderte noch ſehr gebräuchlich geweſenen Rechnung auf Linien **) dienen, von welcher Adam Rieſens Rechnung auf Linien und Feder, (Leipzig 1550) ſo wie die davon gemachten wiederholten Auflagen, hier und da noch vorkommen.

Gleichwohl würde man mir mit Recht Vorwürfe machen können, wenn beyde Colonnen zu weiter nichts dienten, als Rechnungen darauf vorzunehmen, deren Behandlung, theils wegen ihrer Weitläuftigkeit, theils wegen ihres eingeſchränkten Gebrauchs, ſchon längſt vergeſſen iſt.

Nützlich und unſtreitig wichtiger, ſind die ſogenannten Rhabdologien, oder Rechnungen mit Stäben. Es hat nehmlich, wie auch Leupold behauptet ***) Neper zuerſt wahrgenommen, daß es vortheilhaft ſey, die Zahlen, vorzüglich die Producte der Pythagoriſchen Tafel, colonnenweiſe auf einzelne Stäbe zu bringen, weil man auf die Art, die Ziefern der Zahlen nach beliebiger Ordnung zuſammenſetzen, die gröſten Zahlen ausdrücken, und die damit vorzunehmenden Veränderungen leicht machen kann. Daher iſt die Benennung der Neperiſchen Rechenſtäbe entſtanden, deren Einrichtung und Gebrauch zu bekannt iſt, als daß man weiter etwas davon zu ſagen nöthig hätte.

Was Neper für die dekadiſche Rechnung gethan hat, das hat Reyher auf ſexageſimal-Rechnungen angewendet. Seine Sexagenalſtäbe ſind zwar nicht ſo bekannt, wie die

*) Theatrum Arithmetico-Geometricum, p. 78.

**) Ebendaſ. S. 9-16.

***) Ebendaſ. S. 20 ꝛc. Schott nennt ſie columnas Pythagoricas diſcretas et mobiles. Organ. Mathem. L. I. c. IX. p. 124.

Neperiſchen; wer aber dieſe zu gebrauchen weiß, wird auch jene nutzen können. Ihr Gebrauch iſt heut zu Tage durch den Canonem Sexagenarum, in welchem die Producte, wie auf den Stäben, abgetheilt ſind, ſehr herunter geſetzt worden.

Beyderley Stäbe, und ſo auch andere, kann man ſich aus D, III; oder auch aus I, II, wenn man die Verticalreihen dieſer Colonnen, auf Pappe, Holz, u. d. g. leimt, und die Zahlen in die zugehörigen Abtheilungen einſchreibt, leicht ſelbſt verfertigen.

Man hat auch Rechenſtäbe, auf welchen genau und ſcharf eingetheilte Linien die Stelle der Zahlen vertreten, oder Linien und Zahlen zu dieſer Abſicht mit einander vermiſcht vorkommen. Dahin gehören der Scheffeltſche mechaniſche Fuß, und des Herrn Oberb. Lamberts zween zuſammengehörige logarithmiſche Rechenſtäbe. Vom erſten hat oft erwähnter Leupold *) ausführlich gehandelt; von den letztern will ich nur ſo viel erwähnen, daß dadurch, daß man ſie verſchiedentlich neben einander legen, auch an einander verſchieben kann, man auf einmal, ſo weit das Inſtrument zureicht, ganze Reihen von Zahlen, von Producten, Quotienten, Reſten, Verhältnißzahlen, u. ſ. w. finden kann. Ihr Herr Verfaſſer hat ihren weitläuftigen Nutzen ſelbſt beſchrieben **), und bey der Gelegenheit ſeine Gedanken über den Gebrauch die Rechnungen durch Maſchinen und Inſtrumente zu erleichtern, geäuſſert. Daß man zu dergleichen Stäben, deren Zahl man noch vermehren könnte, die Segmente der Colonnen in D, wegen der ſo genauen Eintheilung, nicht brauchen kann, iſt für ſich klar.

Vorzüglich nützlich ſind aber dieſe Colonnen, beſonders IV, Additions- und Subtractionsſcalen (échelles) daraus zu machen, durch welche man oft die beſchwerlichſten Rechnungen

*) Theatr. Arithm. Geometr. S. 41. u. f.

**) Beſchreibung und Gebrauch der logarithmiſchen Rechenſtäbe. entworfen von J. H. Lambert. Augsburg 1761.

nungen beträchtlich erleichtern, und dadurch, ſelbſt die Richtigkeit derſelben, nicht wenig befördern kann. Man ſchneidet nehmlich von den wagerechten Reihen, der zuvor auf Pappe, oder ſtarkes Papier geleimten Colonnen, die man nach Befinden auch weiter eintheilen kann, eine um die andere, oder auch, wenn es die Umſtände erfordern, mehrere neben einander, in feſtgeſetzten Diſtanzen aus, und ſchreibt auf die übrigen diejenigen beſtändigen Zahlen, deren Addition oder Subtraction in der Rechnung oft vorkommt. Dieſe Scalen kann man alsdenn bequem über einander, ſo wie über jede andere mit Zahlen beſetzte Ebene verſchieben, und dadurch die gehörigen Zahlen immer an die Stellen bringen, wo ſie addirt, oder ſubtrahirt werden ſollen, ohne ſolche jedesmal von neuem zu ſchreiben. Auch die, für die vorkommenden Fälle zu beobachtende Diſtanz, beym Auftragen ſolcher Zahlen, kann dienlich ſeyn, diejenigen Zahlen, die nach einer gewiſſen Ordnung unter einander kommen müſſen, ſogleich in dieſe Ordnung zu bringen, wenn nur die erſten gehörig unter einander liegen.

Daß dergleichen Scalen ihren vorzüglichen Nutzen bey logarithmiſchen und trigonometriſchen Rechnungen haben, wird man von ſelbſt vermuthen. Auch hat Herr Profeſſor Bernoulli *) in Berlin, der ſich dergleichen für die Sinus und Coſinus für die Tangenten und Cotangenten gemacht hatte, ſich derſelben, ſo wie Herr Profeſſor Lambert noch vor ihm, in ähnlichen Fällen, mit nicht geringem Vortheile und beträchtlicher Zeiterſparniß bedient.

Auch Segmente von durchſcheinendem Papiere, unbeſchrieben, oder auch mit darauf, in beſtimmten Entfernungen, von einander, geſetzten Zahlen, können nützlich ſeyn. Solcher Segmente hat der Herr von Schönberg bey mehr als einer Gelegenheit ſich mit Vortheil bedienet. Schreibt

 man

*) Recueil pour les Aſtronomes T. III. p. 138.

man z. E. die Quadrate der Trigonalzahlen, nach der Ord=nung, unter einander, ſo kann man daraus nach S. 81, V. und durch Auflegung eines ſolchen Segments, die Cubic=zahlen augenblicklich, durch Subtraction dieſer Quadrate, nach der Reihe, auf das Segment, und zwar in gleichen Entfernungen mit den darunter befindlichen Potenzen der Trigonalzahlen, hinſchreiben. Eben dieſer junge Cavalier hat auch einen Vortheil ſich erdacht, Logarithmen verſchie=dener Syſteme, künſtliche und natürliche oder hyperboli=ſche, bequem auf einander zu reduciren, und die dabey ge=wöhnliche verkürzte (contracta) Multiplication aus dem Mo=del des Syſtems, in welches man den Logarithmen übertra=gen will, auf eine verkürzte Addition ſogleich zu bringen.

Das, was bisher gezeigt worden iſt, bezieht ſich durch=gängig auf ganze Zahlen. Ich will noch kürzlich beyfügen, wie ſich die Methode des Abzählens, bey der vorgelegten Einrichtung, auch auf Brüche, decimale, ſexageſimale, und überhaupt auf Brüche von jeder Benennung anwenden läßt.

In der erſten Colonne der Tafel D findet man die Zah=len 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nach der Reihe, von der Linken zur Rechten, den Verticalreihen vorgedruckt. Dieſe Zahlen kann man nach Gefallen, auf Einheiten jeder Ordnung, der poſitiven, ſo wie der negativen, alſo auch auf die Ordnung — 1, oder auf Zehnthel beziehen. In ſol=chem Falle hat man alle Zehntheile nach einander, über den Verticalreihen, und wenn man den wagerechten Reihen die natürlichen Zahlen von 0 an hinter einander, mit Beyſetzung eines Comma, um dadurch die Ganzen, von den decimal Brüchen abzuſondern, vorſchreibt; den einzelnen Fächern aber dieſer wagerechten Reihen, den Werth der überſtehen=den Zehntheile einmal für allemal beylegt: ſo erhält man da=durch die Reihe der natürlichen Zahlen, mit allen dazwi=

ſchen

ſchen fallenden Zehntheln, auf eben die Art, wie vordem die ganzen Zahlen, mit größter Geſchwindigkeit.

Mit dieſer Reihe hat man aber auch alle Vielfache der einzelnen Glieder ſogleich, wenn man, nach dem, was bey den ganzen Zahlen erinnert worden iſt, nur den Zähler abzählt, und die jedesmalige Ordnungszahl in das abgezählte Fach einſchreibt. So geben die Vielfachen von 0, 9; oder $\frac{9}{10}$ nach 9 abgezäht, nach und nach die Brüche 0, 9; 1, 8; 2, 7; 3, 6; 4, 5; 5, 4 ꝛc. die Vielfachen von 1, 7 oder $\frac{17}{10}$, nach 17 abgezählt, die Brüche 1, 7; 3, 4; 5, 1; 6, 8; 8, 5; ꝛc. wobey zugleich hier eben der Vortheil, wie bey ganzen Zahlen, ſtatt findet, das jedes gerade unter einer Zahl liegende Fach, eine um 10 Decimalſtellen entfernte Zahl enthält, u. ſ. w. Man kann alſo auch hier Patronen und Diſtanzenſcalen anbringen, wenn man es für gut befindet.

Daß man zu eben der Abſicht auch den Bogen A brauchen könne, bedarf keiner Erinnerung, eben ſo wenig, als daß man durch ihn, ſo wie er für die ganzen Zahlen eingerichtet wird, die Reihe der natürlichen Zahlen, mit allen dazwiſchen fallenden hunderten Theilen, ohne etwas daran zuändern, fertig hat, wenn man nur die in den Fächern der Geſetze ſtehenden Zahlen, auf ſolche Theile bezieht.

Für die ſechzigtheiligen, ſo genannten phyſiſchen oder aſtronomiſchen Brüche, darf man nur in jedem Geſetze der Tafel A, die vier letzten wagerechten Reihen, oder das Parallelogramm $\begin{matrix}60..69\\ :\quad :\\ 90..99\end{matrix}$ wegſtreichen, und die übrigen Zahlen der Fächer als Zähler auf den Nenner 60 beziehen. Die vorgeſchriebenen Zahlen über den Seitenſtrichen, bleiben wie bey den ganzen Zahlen.

Bey der Rechnung mit ſechzigtheiligen Brüchen iſt es nützlich, die Producte zweener Factoren, deren keiner gröſſer iſt, als 59, oder noch beſſer, die Quotienten nebſt den

Reſten, welche dieſe Producte durch 60 dividirt, geben, im Voraus zu wiſſen. Hierzu dient die Tafel der ſechzigtheiligen Producte (*Canon Sexagenarum s. Hexacontadôn*) dergleichen in dem oben erwähnten mathematiſchen Lexico S. 403, mit vielen Fehlern verſetzt, zu finden iſt. Hätte man dergleichen Tafel ſelbſt nicht, ſo könnte man ſie durch die ſo eingerichtete Tafel A, nun leicht machen, oder auch eine bereits gefertigte prüfen, um ſich ſolcher, auf die vorkommenden Fälle, mit Sicherheit bedienen zu können. Die Tafel A, giebt hier auf einmal den Quotienten des geſuchten, durch 60 getheilten, Products, zugleich mit ſeinem Reſte, in die beyden Claßen ſchon gehörig abgetheilt; und das mit nicht mehrerem Zeitaufwande, als man braucht, die Vielfachen der ganzen Zahlen zu ſuchen. Die erſten Vielfachen der 37 z. E. kommen hier, in Quotienten und Reſten, 00, 37; 01, 14; 01, 51; 02, 28; 03, 05; 03, 42; 04, 19; 04, 56; 05, 33;

Was hier von Decimal- und Sexageſimalbrüchen erinnert worden iſt, kann hinreichend ſeyn, zu überſehen, wie man dergleichen Tafeln auch auf Brüche von andern Benennungen, z. E. auf zwölftheilige u. ſ. w. anwenden und gebrauchen könne. Sie ſind zu ſchneller Reduction der Brüche von verſchiedenen Namen, ſehr bequem.

Unter vielen, will ich nur eines einzigen, aber ſehr oft vorkommenden Falls, gedenken, wie man nehmlich gemeine Brüche leicht und ganz mechaniſch in Decimalbrüche verwandeln könne. Dieſe Entwicklung iſt mit der hier getroffenen Einrichtung ſo innigſt genau verbunden, daß der Herr von Schönberg, ſobald ich ihm ſagte, daß die promteſte Auflöſung einer ſolchen Forderung in meiner Gewalt wäre, ſie auch ſogleich für ſich ſelbſt, und auf der Stelle, blos in Gedanken, fand.

Bey der Diviſion eines Nenners n in ſeinen Zähler mit den angehängten Nullen, können aufs höchſte (n — 1)erley

Reſte

Reſte vorkommen, die beſtändig, durch Hinzuſetzung einer Nulle aus dem Zähler, ein neues Dividend geben. Könnte man nun die Ordnung dieſer Reſte, ſo wie der aus ihnen, durch weitere Diviſion des Nenners, entſpringenden Theile des Hauptquotienten, im Voraus beſtimmen: ſo würde man dadurch des oft ſo weitläuftigen, und bey groſſen Zahlen höchſt beſchwerlichen Dividirens, ganz überhoben ſeyn.

Wie das geſchehen könne, will ich itzt an ein paar Beyſpielen überzeugend darthun. In Numer II der Beylage D, findet man die Verticalreihen mit den überſtehenden Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, von der Rechten zur Linken gehend, bezeichnet. Geſetzt man ſoll den Bruch $\frac{1}{7}$ in Decimalſtellen entwickeln: ſo nehme man von dieſer Colonne, 7 wagerechte Reihen, d. i. 70 Fächer;

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
						1				10
			2							20
3							4			30
				5						40
	6							7		50
					8					60
		9							10	70

ſchreibe, rechter Hand dieſer Reihen die Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 unter einander; zähle die Zahl 7, wie bey Aufſuchung der Factoren gezeigt worden iſt, von der Linken zur Rechten, von dem 7ten Fache anfangend, nach und nach ab; und ſetze endlich in die ſo abgezählten Fächer, die Ordnungszahlen von 1 bis 10, wie ſolche in der Reihe auf einander folgen.

Wenn man das ſo eingerichtete Parallelogramm etwas aufmerkſam betrachtet, ſo wird man ſogleich wahrnehmen,

daß

daß von den dreyerley Zahlen deſſelben, die zur Seite beygeſchriebenen, die möglichen Dividenden, wie ſolche nach und nach vorkommen können; die in der zugehörigen wagerechten Reihe zunächſt eingeſchriebenen, ihre Quotienten; die den Verticalreihen dieſer Quotienten überſchriebenen Zahlen, die correſpondirenden Reſte, geben werden. So gehört z. E. zu der Zahl 30, als Dividend, die in ihrer wagerechten Reihe zunächſt eingeſchriebene Zahl 4, als Quotient, und die darüberſtehende Zahl 2, giebt den Reſt. In eben der Reihe 30 ſtehet zwar auch die Zahl *3* als ein Quotient, welcher den Reſt 9 laſſen würde; da man aber unter den möglichen Quotienten nur den beybehält, der einen kleinern Reſt giebt als der Diviſor (7) iſt: ſo übergeht man hier die Curſivzahl *3*, ſo wie die folgenden gleichartigen *6* und *9*, welche insgeſamt in den Abſchnitt hinter dem höchſten Reſt (6) zu liegen kommen; und ſo zeigt denn die Einrichtung von ſelbſt im Voraus an, welche Zahlen Theile oder Glieder des Quotienten werden, und welche es nie ſeyn können.

Dieſe Theile bey dem Bruche $\frac{1}{7}$ nach der Ordnung zu finden, verfährt man alſo:

7 in 1 kann man nicht haben, kommt alſo 0 in die Stelle der Ganzen; der Reſt 1 beſtimmt das neue Dividend 10, das neben der erſten wagerechten Reihe ſteht, zu welchem die in dem zugehörigen Fache eingeſchriebene 1 als Quotient, die überſtehende 3 als Reſt gehört; dieſer zweyte Reſt 3 beſtimmt wieder ein neues Dividend 30, und dieſes den Quotienten 4 und den Reſt 2; dieſer giebt für 20 den Quotienten 2 und den Reſt 6; und ſo geben, 60 die Zahlen 8, 4; und 40 die Zahlen 5, 5; und 50 die Zahlen 7, 1; als Quotienten und Reſte, ſo wie alle, auf die Art nach und nach gefundenen, einzelnen Quotienten, als Glieder des Hauptquotienten, neben einander geſchrieben, den Decimalwerth

des Bruchs $\frac{1}{7} = 0, 142857$ — mit ſeinem Perioden hinter den Ganzen.

Das bey dem eigentlichen Dividiren vorkommende Multipliciren und Subtrahiren wird alſo dadurch in ein bloſſes Anweiſen und Abſchreiben verwandelt. Man könnte die zuſammengehörigen Zahlen des Parallelogramms, auf folgende Art, auch für ſich allein, Dividenden und Quotienten neben einander, und darunter den Reſt, ſetzen

7) $\frac{10|1}{3}$; $\frac{20|2}{6}$; $\frac{30|4}{2}$; $\frac{40|5}{5}$; $\frac{50|7}{1}$; $\frac{60|8}{4}$;

Daß man auf die Art eben ſo leicht den Decimalwerth von $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, finden könne, iſt klar. Das erſte Dividend wird nur verändert; Die Fortſchreitung von einem Theile des Hauptquotienten zu dem andern, bleibt immer dieſelbe.

Gleichwohl würde der Vortheil bey einem Bruche nicht beträchtlich ſeyn, deſſen Nenner eine ſo kleine Zahl iſt; aber er läßt ſich auch auf Brüche für zwey und mehrzifrige Nenner, mit Leichtigkeit anwenden, und verdient daher Aufmerkſamkeit. Ehe ich weiter gehe, will ich noch eine Anmerkung voraus ſchicken, und die Einrichtung ſelbſt noch einfacher machen.

Im Vorhergehenden giengen die überſchriebenen Reſte von 0 bis auf 9, die eingeſchriebenen Quotienten von 1 bis auf 10, fort. Man verwechsle nunmehro dieſe Ordnung bey beyden: man ſchreibe die Zahlen von 1 bis 10, gleichfalls von der Rechten zur Linken, über die Colonnen, als Reſte; ſetze 0 in das erſte Fach, und zähle von da an den Nenner des gegebenen Bruches bis auf die Ordnungszahl 9, als den letzten einzuſchreibenden Quotienten, ab; ſtatt der Seitenzahlen 10, 20, 30, ꝛc. ſetze man nunmehr die natürlichen Zahlen 1, 2, 3.. bis mit der Zahl des

Nen-

Nenners, neben den Reihen, weil dadurch der jedesmalige Reſt aus der wirklichen Diviſion, ehe man ihn noch durch Zuſetzung einer Nulle zu einem neuen Dividend macht, immer mit einer dieſer Seitenzahlen überein kommen wird. Der Erfolg wird zeigen, daß dieſe Einrichtung noch kürzer und bequemer iſt, als die erſte. Auf dieſe werden ſich auch die folgenden beyden Exempel beziehen.

Den Decimalwerth von $\frac{1}{29}$ zu finden, richte man 29 wagerechte Reihen auf nurgemeldte Art ein. Die Seitenzahlen, mit den zugehörigen Quotienten in den Fächern, und den correſpondirenden Reſten über den Verticalreihen, werden folgende ſeyn:

$$\frac{1|0}{10};\ \frac{3|1}{1};\ \frac{6|2}{2};\ \frac{9|3}{3};\ \frac{12|4}{4};\ \frac{15|5}{5};\ \frac{18|6}{6};\ \frac{21|7}{7};\ \frac{24|8}{8};\ \frac{27|9}{9}$$

Hier fehlen, wie man ſieht, viele Seitenzahlen, bey denen alſo auch keine Quotienten und keine Reſte ſtehen können. Das könnte aber doch vielleicht die Entwicklung nicht hindern. Aber ſchon der erſte Reſt 10, findet keine Seitenzahl, auf die er ſich doch bezieht. Man muß alſo hier dieſe anſcheinende Schwierigkeit zuvor heben.

Man ſieht ſogleich, daß jede wagerechte Reihe, in welcher kein Quotient der Seitenzahl gegen über ſteht, nothwendig zu dem nächſt vorhergehenden Quotienten gehören müſſe, nur mit dem Unterſchiede, daß der Reſt dieſes Quotienten um 10, 20, 30 u. ſ. f. zugleich erhöhet werden muß, nachdem die Reihen, zu welcher die Seitenzahlen gehören, um 1, 2, 3, oder mehrere Reihen, jede von 10 Fächern, von der Reihe, in welcher dieſer Quotient liegt, entfernt ſind. Man ſchreibe alſo zu dergleichen Seitenzahlen, immer den vorhergehenden letzten Quotienten, mit gehöriger Erhöhung

des

des Reſtes, ſo lange, bis man auf eine Seitenzahl kömmt, welcher ein neuer Quotient gegen über ſteht, der wieder ſeinen eigenen angewieſenen Reſt haben wird. Nach dieſer Bemerkung ergeben ſich die Seitenzahlen, Quotienten und Reſte, in ihrer Ordnung, wie folget:

$$\frac{1|0}{10};\ \frac{2|0}{20};\ \frac{3|1}{1};\ \frac{4|1}{11};\ \frac{5|1}{21};\ \frac{6|2}{2};\ \frac{7|2}{12};\ \frac{8|2}{22};\ \frac{9|3}{3};\ \frac{10|3}{13}$$

$$29)\ \frac{11|3}{23};\ \frac{12|4}{4};\ \frac{13|4}{14};\ \frac{14|4}{24};\ \frac{15|5}{5};\ \frac{16|5}{15};\ \frac{17|5}{25};\ \frac{18|6}{6};\ \frac{19|6}{16};\ \frac{20|6}{26}$$

$$\frac{21|7}{7};\ \frac{22|7}{17};\ \frac{23|7}{27};\ \frac{24|8}{8};\ \frac{25|8}{18};\ \frac{26|8}{28};\ \frac{27|9}{9};\ \frac{28|9}{19};\ \frac{29|9}{29}$$

Die um 10 oder 20 erhöheten Reſte zu den Seitenzahlen, denen in der Tafel kein Quotient gegen über ſtehet, ſind hier curſiv gedruckt.

Es giebt nehmlich, 1 durch 29 dividirt, 0 in die Stelle der Ganzen, und 1 zum Reſte; dieſer, in den Seitenzahlen aufgeſucht, giebt 0 zum Quotienten, in die erſte Decimalſtelle, und 10 zum Reſte; die Seitenzahl 10 giebt den Quotienten 3, den Reſt 13; die Seitenzahl 13 den Quotienten 4, den Reſt 14; und ſo giebt 14 den Quotienten 4, und weiſet auf 24; 24 giebt 8, und verweiſet auf 8 u. ſ. f. bis man wieder auf die Seitenzahl 1 geleitet wird, von welcher man ausgegangen iſt, den Perioden der Decimalen zu ſuchen, den man nun auch gefunden hat. Hieraus kommt der Werth von

$$\frac{1}{29}\ 0{,}0344827586206896551724137931 \text{ —}$$

Auf gleiche Art findet man auch den Bruch $\frac{m}{29}$, nur daß hier das Dividend für die erſte Decimalſtelle, immer ein anderes iſt, und alſo auch ein anderer Reſt, der auf eine andere Seitenzahl verweiſet, u. ſ. f.

Es

Es verſteht ſich, daß wenn man die Quotienten in der Tafel vor ſich hat, man der Mühe überhoben ſeyn kann, ſie mit den zugehörigen Zahlen, wie hier geſchehen iſt, erſt beſonders abzuſetzen; auch ſelbſt die Erhöhung der Reſte, kann man ſich, für nicht gar zu groſſe Zahlen, erſparen, wenn man geſchwind und ſicher transponiren kann.

Der Nenner 29, ſo wie jede auf 9 ſich endigende Zahl, haben das Beſondere, daß ihre Quotienten, in den unter einander liegenden wagerechten Reihen der Tafel, alle in eine gerade Linie, von der Rechten zur Linken, ſo wie die auf 1 ſich endigenden Nenner, alle in eine gerade Linie von der Linken zur Rechten fallen. Bey den auf 7 und 3 ſich endigenden Zahlen iſt es anders; dieſe liegen in gebrochenen, aber auch durchgängig ſich parallel bleibenden Linien. Man könnte daher jene regulär, dieſe irregulär nennen, und noch andere nützliche Eintheilungen machen, die eine genauere Unterſuchung leicht an die Hand geben würde.

Auch ließe ſich zeigen, wie man für alle Nenner die Quotienten und Reſte nunmehr, auch independent von der Tafel, nach einander finden und gleichſam mechaniſch ſchreiben könnte. Für die Primzahlennenner gäben die Zahlen 11, 13, 17, 19 hierzu die Form. Daß man auf die Art eine Tafel, dergleichen Herr Prof. Bernoulli für dieſe Brüche geliefert hat*) leicht prüfen und weiter fortſetzen könnte, iſt keinem Zweifel unterworfen. Die hierzu nöthige Einrichtung der Fächer braucht man nicht einmal ſelbſt zu machen. Man kann hierzu jeden gemeinen Rechner ſogleich anweiſen, und die Richtigkeit ſeiner Arbeit aus einer ſehr leichten Probe überſehen. Das Vorſchreiben der natürlichen Zahlen von 1 bis auf den Nenner n hat keine Schwürigkeit. In dem erſten Fache muß allemal 0 ſtehen, und ſo fällt der Quotient

1 dar-

*) Nouv. Mem. de l'Ac. Roy. de Scienc. Année 1771. S. 299. u. f.

1 auf das Fach n + 1. Der *Quotient* 5 kann *nie* anders als in ein Fach der Verticalreihe 5 zu *liegen* kommen; die überſtehende Seitenzahl wird immer die Zahl der gröſſern Hälfte des ungeraden Nenners ſeyn; der *Quotient* 0 muß endlich n — 1 Stellen von dem *letzten* Fache entfernt liegen.

Ich will noch einige Schritte weiter gehen. Die Einrichtung für den Bruch $\frac{1}{47}$ gäbe folgende Anordnung, in welcher voran die Seitenzahlen, in der Mitte die *Quotienten*, curſiv gedruckt, und zuletzt die Reſte ſtehen.

1,0,10	2,0,20	3,0,30	4,0,40	5,1, 3	6,1,13	7,1,23	8,1,33	9,1,43	0,2, 6
11,2,16	12,2,26	13,2,36	14,2,46	15,3, 9	16,3,19	17,3,29	18,3,39	19,4, 2	20,4,12
21,4,22	22,4,32	23,4,42	24,5, 5	25,5,15	26,5,25	27,5,35	28,5,45	29,6, 8	30,6,18
31,6,28	32,6,38	33,7, 1	34,7,11	35,7,21	36,7,31	37,7,41	38,8, 4	39,8,14	40,8,24
41,8,34	42,8,44	43,9, 7	44,9,17	45,9,27	46,9,37	47,9,47			

Aus dieſen Zahlen findet man alle Theile des Hauptquotienten von $\frac{1}{47}$, einzeln nach einander. Es fragt ſich 1) ob man dieſe Anordnung nicht noch *näher* und *geſchwinder*, und ob man nicht 2) auch zwo *Ziffern* dieſes Quotienten auf einmal finden könne?

Die erſte Frage iſt im Vorhergehenden bereits bejaht worden; hier will ich die Auflöſung geben, wie ich ſie nachher geſucht habe. Zu den Primzahlen 11, 13, 17, 19 gehören folgende Reſte nach der Ordnung:

zu 11 die Reſte 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1
= 13 = = 10; 7; 4; 1; 8; 5; 2; 9; 6; 3
= 17 = = 10; 3; 6; 9; 2; 5; 8; 1; 4; 7
= 19 = = 10; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Der Fortgang dieſer Reſte, ſo wie ihre Symmetrie bey 11 und 19, bey 13 und 17, fällt in die Augen. Eben dieſe Reſte finden auch bey *höhern*, auf 1, 3, 7, 9 ſich endigenden Primzahlen ſtatt. Die Quotienten wachſen, wie bekannt, von 0 bis 9. Man darf alſo nur wiſſen, wo jeder in ſeiner

Ordnung zuerſt vorkommt, und was für ein Reſt darzu gehört. Das letzte iſt durch die voranſtehende Anzeige des Fortgangs der Reſte überhaupt gegeben; das erſte findet man durch bloſſe Erhöhung des vorhergehenden Reſtes, ſo lange ſolcher den Nenner nicht überſteigt: und ſo findet man aus dem, allen Zahlen gemeinſchaftlichen Anfange 1, 0, 10, aus dem Fortgange der Reſte, und aus den gegebenen Nenner des Bruchs, alle Quotienten und Reſte, wie ſolche nach und nach zu den natürlichen Zahlen von 1 bis n, geſetzt werden müſſen.

So wird z. E. für $\frac{1}{47}$, aus den Zahlen 1, *o*, 10, der Quotient *o* ſo lange beybehalten, als die ſucceſſive Erhöhung des anfänglichen Reſtes (10) immer noch einen kleinern Reſt giebt als 47. Bey der Zahl 5 würde dieſer Reſt ſchon 50 ſeyn; daraus folgt, daß zu der Zahl der neue Quotient *1* kommen müſſe, zu welchem der nächſte auf 10 folgende Reſt 3 gehört; und ſo findet man auch wirklich 5, *1*, 3 als zuſammengehörige Zahlen.

Auf ſolche Art verwandeln ſich die wagerechten Reihen, die man zu Aufſuchung der Quotienten und Reſte braucht, in eben ſo viele einzelne Fächer, und kann man hierzu den Bogen A mit Vortheil gebrauchen. Man findet dieſe Zahlen auch auſſer der Ordnung: Man nimmt die Vielfachen des Nenners von 1 bis 9; der Einer in der letzten Stelle, von 10 abgezogen, giebt den Reſt; zu den übrigen Zehnern, Hundertern, u. ſ. w. nur einen Zehner zugeſetzt, giebt die natürliche Zahl, und die Ordnungszahl des Vielfachen, den Quotienten; die übrigen Stellen füllt man wie vorher aus. So iſt z. E. 9. 47 = 423. Hier giebt 3 von 10 abgezogen, 7 zum Reſte, 42 + 1 iſt 43; alſo ſind 43, *9*, 7 zuſammengehörige Zahlen.

Zwo Zifern auf einmal zu finden, dient folgende Vorrichtung. Man leimt zwo Seiten Dd nach ihren Höhen über einander.

Dadurch erhält man 100 Fächer in der Breite, über welche man die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 als Reſte ſetzt. Den wagerechten Reihen ſchreibt man ihre Ordnungszahlen nach der Reihe vor, und zählt die Quotienten, auf eben die Art, wie vorher, aber hier von 0 bis 99, in der Tafel ab. Dieſe Tafel giebt alsdenn *immer zwo Ziſern auf einmal* in den Hauptquotienten, und ſchließt, für kleinere Zahlen als 100, diejenigen Ziſern aus, die nie mit einander in den Quotienten, als Glieder deſſelben, beſtehen können. Die hier zuſammengehörigen Zahlen ſind folgende:

1, 02, 6	2, 04, 12	3, 06, 18	4, 08, 24	5, 10, 30
11, 23, 19	12, 25, 25	13, 27, 31	14, 29, 37	15, 31, 43
21, 44, 32	22, 46, 38	23, 48, 44	24, 51, 3	25, 53, 9
31, 65, 45	32 68, 4	33, 70, 10	34, 72, 16	35, 74, 22
41, 87, 11	42, 09, 17	43, 91, 23	44, 93, 29	45, 95, 35

6, 12, 36	7, 14, 42	8, 17, 1	9, 19, 7	10, 21, 13
16, 34, 2	17, 36, 8	18, 38, 14	19, 40, 20	20, 42, 26
26, 55, 15	27, 57, 21	28, 59, 27	29, 61, 33	30, 63, 39
36, 76, 28	37, 78, 34	38, 80, 40	39, 82, 46	40, 85, 5
46, 97, 41	47, 99, 47			

Den Werth von $\frac{1}{47}$ hieraus zu finden, verfährt man wie vorher bey den einziſrigen Quotienten:

47 in 1 dividirt, giebt 0 in die Stelle der Ganzen, und 1 zum Reſte; dieſe 1 in den Seitenzahlen aufgeſucht, giebt 02 zum Quotienten, und verweiſet auf 6; die Seitenzahl 6 giebt den Quotienten 12, und verweiſet auf 36; zu 36 gehöret 76 als Quotient, und 28 als Reſt, u. ſ. w. Dieſe einzelnen Quotienten geben zuſammen den Hauptquotienten von

$$\frac{1}{47} = 0,\dot{0}21276595744680851063829787234042553191489361\dot{7}$$

Die hier über o und 7 geſetzten Puncte bezeichnen, nach Art der Engelländer,*) Anfang und Ende des Perioden in den Decimalen des vorgegebenen Bruches.

Die Quotienten gehen hier nach der Ordnung der Seitenzahlen regelmäßig von zwey zu zwey fort, und wachſen in einigen Stellen um drey. Eben ſo nehmen auch die Reſte um 6 zu, bis auf die Stellen, wo die Quotienten um drey wachſen, nach welchen beyde wieder ordentlich fortſchreiten.

Es iſt klar, daß dieſes in der Tafel eine in die Augen fallende Symmetrie geben müſſe. Das Geſetz dafür aufzuſuchen und zu erweiſen, habe ich ietzt noch nicht Zeit gehabt. Dieſes, nebſt verſchiedenen andern Unterſuchungen, was aus der Einrichtung für die in einem fortgehenden Brüche (fractiones continuae) für die Exponenten, u. ſ. f. folgt, bleibt alſo dermalen noch zurück, bis Zeit und Umſtände zu deren Entwicklung mehr Muße geſtatten werden.

Auch kann ich itzt nichts von den Vortheilen beybringen, welche die Fächer bey den allgemeinen oder Buchſtabengrößen verſchaffen. Inzwiſchen glaube ich, durch das, was ich hier gezeiget habe, hinlänglich dargethan zu haben, daß die Beylage D, Dd, für forſchende, und ohne fremde Anleitung ſelbſt denkende Liebhaber, ohne Zweifel, eine der brauchbarſten iſt, weil man bey ihr, in die leer gelaſſenen Fächer, ſolche Zahlen und Größen, wie man nur für gut befindet, ſetzen, und dadurch andere unbekannte aufſuchen und finden kann.

Auch

*) Theory of circulating fractions; by Iohn Robertſon in den Philoſ. Transact. von 1768. Herr Prof. Bernoulli hat hiervon in den nur angeführten Theile der Nouv. Mem. de Berlin S. 282. u. f. einen Auszug gegeben.

Auch in andern Fällen kann eine ſolche Tafel ihren mannichfaltigen Nutzen haben. Man kann ſie zu einer Producten- und Quotiententafel gebrauchen, ſo wie ſolche auch zu Einſchreibung der Factoren und Primzahlen, auf die Art wie der berühmte Tob. Mayer *) in einem Beyſpiele bis auf 1600 gezeiget hat, nützlich iſt; man kann auf ihr den Gang krummer Linien durch Verzeichnung, oder die Natur und Eigenſchaften derſelben, durch das Newtoniſche Parallelogramm unterſuchen; man wird gewiß keine Linien auf das Parallelogramm bringen, für welche das Netz Dd, nicht überflüßig groß ſeyn ſollte; Liebhaber meteorologiſcher Beobachtungen, können hier ihre Bemerkungen, nach ihren eignen, oder auch nach den vom Herrn Oberbaurath Lambert darzu vorgeſchlagenen Zeichen **) in die gehörigen Fächer eintragen; und wer gerne reiſet, kann ſich auch daraus —— einen Meilenzeiger machen.

Zu dieſer Beſchreibung können den Liebhabern fünfferley verſchiedene, auf einzelne Bogen gedruckte, Beylagen, A, B, C, Cc, D; eben ſo viel Individualpatronen für die Factoren 7, 11, 13, 17, 19; nebſt zwey Inſtrumenten, einem Diſtanzenmeſſer und einer beweglichen Diſtanzenſcale, auf Verlangen, abgeliefert werden. Hierbey aber iſt den Käufern, zu ihrer Bequemlichkeit, die freyeſte Wahl, zugleich offen gelaſſen worden.

Von den Beylagen oder einzelnen Bogen, enthält A 4000 natürliche, gerade und ungerade Zahlen; B eben ſo viel gerade Zahlen, alſo dieſe Zahlen bis auf 8000; C und Cc aber nur 3600 ungerade Zahlen, oder dieſe Zahlen bis auf

 7199.

*) Mathematiſcher Atlas in 60 Tabellen Tab. I. Augsburg.

**) Nouv. Mem. de l' Ac. Royal de Berlin Anneé 1771 p. 63.

7199. Die Einrichtung und Abſicht dieſer Bogen, ſo wie der Beylage D, iſt in der Beſchreibung umſtändlich gezeigt worden.

Bey dieſen Beylagen, unter denen man eine freye ſelbſt= beliebige Auswahl, nach Abſicht, treffen kann, iſt Niemand bey dem Kaufe, auf irgend eine Art, eingeſchränkt. Die Be= ſchreibung mit dem Kupfer und den fünf Beylagen, A, B, C, Cc, D, hat ihren beſtimmten und feſtgeſetzten Preiß; doch wird man von dieſen Beylagen, auf Verlangen, ganze und halbe Bücher, ſo wie auch einzelne Bogen, an die Liebhaber ablaſſen.

Die Individualpatronen auf dunkelgefärbten Papiere, auf welchem aber doch noch die Queerlinien durchſcheinen, ſo wie die beyden Inſtrumente, braucht ſich niemand anzu- ſchaffen, der das, was dieſe Werkzeuge nur mit mehrerer Be= quemlichkeit und Geſchwindigkeit finden lehren, durch das Abzählen, durch den Zirkel oder durch einen Winkelhaken, die auf alle Fälle hinreichend ſind, aufſuchen will. Die Pa= tronen kann ſich ein Jeder leicht ſelbſt machen; die Inſtru= mente aber, von welchen itzt kein beträchtlicher Vorrath vor- handen iſt, müſſen zuvor bey dem Herrn Verleger beſtellt werden. Auch kann das der Beſchreibung beygefügte Ku- pfer, jeden Tiſcher anweiſen, ſie nach zu machen.

Statt der Einſetzebretterchen bey der Diſtanzenſcale nimmt man noch beſſer dünne Eiſenbleche.

Was die verſprochene Factorentafel anbetrifft, will ich noch kürzlich hier beyfügen:

Daß das weitere Nachdenken, ſeit dem Abdrucke des, die- ſerwegen bekannt gemachten, Avertiſſements vom 24. May d. J. der Anordnung, wie die Zahlen für die abzudruckenden Tafeln eingeſchrieben werden ſollen, noch einige weſentliche, mit der Methode, wie dieſe Zahlen aufgeſucht werden, ganz genau verbundene Vortheile, hinzugeſetzet hat, wodurch es möglich geworden iſt, alle Factoren, aus dem kleinſten, in

vielen Fällen auf der Stelle, in andern durch bloſſes Nachſchlagen, ohne alle weitere Rechnung, mit einem Zeitaufwande von höchſtens einer halben Minute, zu finden. Die Tafel wird hierdurch in einen beträchtlich kleinern Raum eingeſchränkt, als wenn man alle Factoren neben einander hätte abſetzen wollen. Dieſe neuen Vortheile ſind, ſo wie die ganze Einrichtung, Kennern von Einſicht vorgelegt worden. Dieſe haben ſie gebilliget, und es wird genug ſeyn, mich ſtillſchweigend auf ihren Beyfall zu berufen, ohne ihre Namen erſt colonnenweiſe hier eindrucken zu laſſen.

Dieſer neue Zuſatz von Bequemlichkeit, iſt aber auch zugleich ein Zuſatz von Arbeit. Dennoch wird man ſich bemühen, ſo viel als möglich, den Abdruck der Tafel um die in dem Avertiſſement feſtgeſetzte Zeit anzufangen, und alles dabey ſo zu veranſtalten, daß die Liebhaber hoffentlich zufrieden ſeyn werden, wenn ſie ſehen, daß man noch mehr liefert, als man verſprochen hat.

Noch muß ich erinnern, daß dasjenige, was neuerlich dieſer Tafel an Vortheilen hinzugeſetzet worden iſt, die einmal getroffene Einrichtung im geringſten nicht ändert. Sie bleibt im Grunde eben dieſelbe, deren ſich Herr Oberbaurath Lambert in ſeinen Zuſätzen zuerſt bedient hat; nur hat ſie einen, dem Decimalſyſtem angemeſſenern, Zuſchnitt bekommen, welcher zugleich den Vortheil verſchaffte, daß viele Zahlen, ohne der Bequemlichkeit der Leſer dabey Abbruch zu thun, im Drucke ganz ausgelaſſen, andere, wegen ihrer regelmäſſigen periodiſchen Wiederkehr, den Colonnen ein für allemal einverleibt werden können, welches zugleich den Druck erleichtert, und die Reviſion für dieſe Zahlen erſparet. Man weiß wohl, von wie viel verſchiedenen Seiten ein Ding betrachtet, und auf wie mancherley Art es gewendet werden kann. Ob die Stellung und Lage, die ich ihm gegeben habe,

be, die beſtmöglichſte ſeyn, will ich nicht entſcheiden. Es kann ſeyn, daß nach Herrn Lambert und mir, ein Dritter kommt, der das Ding auf den Kopf ſtürzt, und — wider alles Vermuthen — eine weit glücklichere Veränderung mit dieſen Parallelogrammen vornimmt, als Herr Gua mit dem Newtoniſchen, der nach des Herrn Hofrath Käſtners *) Anmerkung, das Ding bloß auf die Spitze ſtellte, das bis auf ſeine Zeit auf einer Seite geſtanden hatte.

Es wird, aus mehr als einer Urſache, nöthig ſeyn, die Vortheile des Einſchreibens, der Stellung der Zahlen, und der ganzen dafür getroffenen Einrichtung, im Voraus, durch den Druck bekannt zu machen; und dieſes ſoll auch gegenwärtig, in folgendem Anagramm, geſchehen, welches auf deutſch alſo lautet:

	64	22	34	59	181	25	23	45	81	9	41
ꝛc	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
19	113	34	7	68	48	57	36	3	5	2	21
m	n	o	p	r	ſ	t	u	v	w	y	z

5000004000005

*) Anal. endlicher Gröſſen §. 688, 689, S. 379.

Leipzig,
gedruckt bey Wilhelm Gottlob Sommer.

der beweglichen Distanzen Scala,
, für den Factor 23 geſtellt, auf der
erſten Colonne liegt.

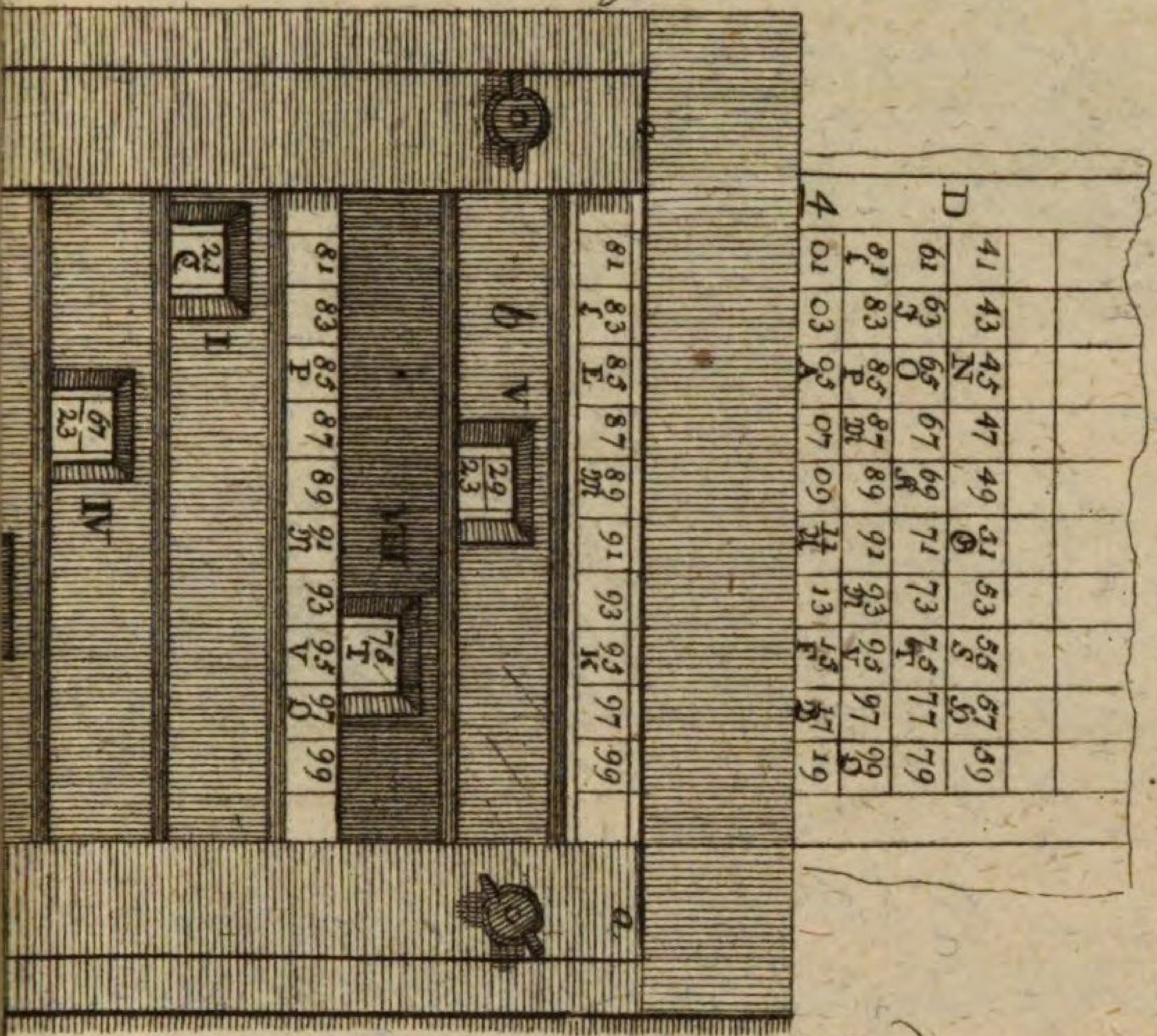
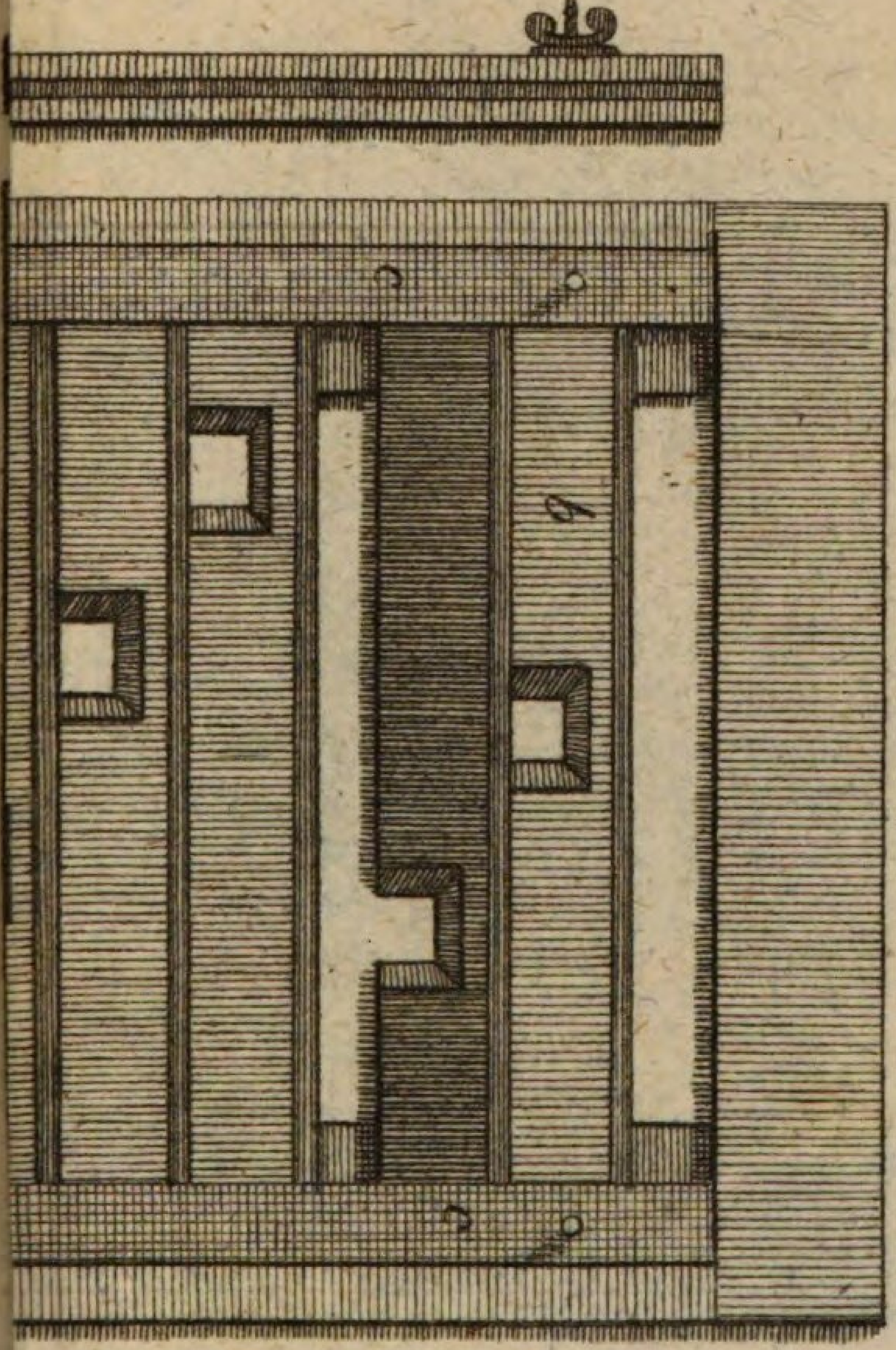


Fig 1



Vorſtellung, wo die aufgeſchraubten Seitentheile a a a a weggenommen daſs man die Brettrchen b. in ihrem Falzeschen kann

Fig 1

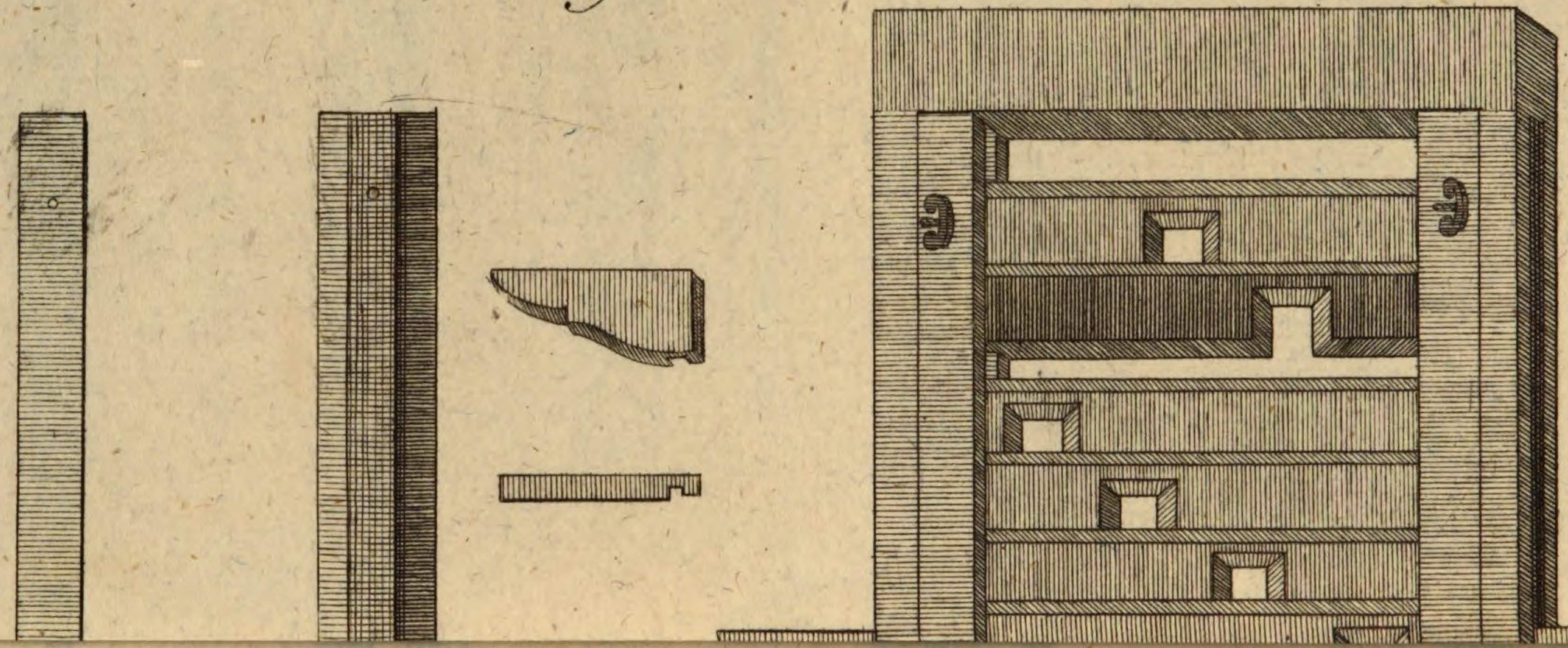


Fig: 2.
Vorstellung des untern
uerbalkens oder Querſchiebers

32	33	34	35	36	37	38	39
42	43	44	45	46	47	48	49
52	53	54	55	56	57	58	59
62	63	64	65	66	67	68	69
72	73	74	75	76	77	78	79
82	83	84	85	86	87	88	89
92	93	94	95	96	97	98	99
02	03	04	05	06	07	08	09
12	13	14	15	16	17	18	19
22	23	24	25	26	27	28	29
32	33	34	35	36	37	38	39
42	43	44	45	46	47	48	49
52	53	54	55	56	57	58	59
62	63	64	65	66	67	68	69
72	73	74	75	76	77	78	79
82	83	84	85	86	87	88	89
92	93	94	95	96	97	98	99
3	4	5	6	7	8	9	10

impairs.

VIII.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
01	02	03	04	05	06	07	08	09
11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26	27	28	29
31	32	33	34	35	36	37	38	39
41	42	43	44	45	46	47	48	49
51	52	53	54	55	56	57	58	59
61	62	63	64	65	66	67	68	69
71	72	73	74	75	76	77	78	79
81	82	83	84	85	86	87	88	89
91	92	93	94	95	96	97	98	99
01	02	03	04	05	06	07	08	09
11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	22	23	24	25	26	27	28	29
31	32	33	34	35	36	37	38	39
41	42	43	44	45	46	47	48	49
51	52	53	54	55	56	57	58	59
2	3	4	5	6	7	8	9	10

VIII.

B

64	66	68	70	72	74	76	78
84	86	88	90	92	94	96	98
04	06	08	10	12	14	16	18
24	26	28	30	32	34	36	38
44	46	48	50	52	54	56	58
64	66	68	70	72	74	76	78
84	86	88	90	92	94	96	98
04	06	08	10	12	14	16	18
24	26	28	30	32	34	36	38
44	46	48	50	52	54	56	58
64	66	68	70	72	74	76	78
84	86	88	90	92	94	96	98
04	06	08	10	12	14	16	18
24	26	28	30	32	34	36	38
44	46	48	50	52	54	56	58
64	66	68	70	72	74	76	78
84	86	88	90	92	94	96	98
3	4	5	6	7	8	9	10

IV.

	3	4	5	6	7	8	9	10
2	04	06	08	10	12	14	16	18
2	24	26	28	30	32	34	36	38
2	44	46	48	50	52	54	56	58
2	64	66	68	70	72	74	76	78
2	84	86	88	90	92	94	96	98
2	04	06	08	10	12	14	16	18
2	24	26	28	30	32	34	36	38
2	44	46	48	50	52	54	56	58
2	64	66	68	70	72	74	76	78
2	84	86	88	90	92	94	96	98
2	04	06	08	10	12	14	16	18
2	24	26	28	30	32	34	30	38
2	44	46	48	50	52	54	56	58
2	64	66	68	70	72	74	76	78
2	84	86	88	90	92	94	96	98
2	04	06	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

2 3 4 5 6 7 8 9 10

IV.

IV.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	25	27	29	31	33	35	37	39
43	45	47	49	51	53	55	57	59
63	65	67	69	71	73	75	77	79
83	85	87	89	91	93	95	97	99
03	05	07	09	11	13	15	17	19
23	25	27	29	31	33	35	37	39
43	45	47	49	51	53	55	57	59
63	65	67	69	71	73	75	77	79
83	85	87	89	91	93	95	97	99
03	05	07	09	11	13	15	17	19
23	25	27	29	31	33	35	37	39
43	45	47	49	51	53	55	57	59
63	65	67	69	71	73	75	77	79
83	85	87	89	91	93	95	97	99
2	3	4	5	6	7	8	9	10

IV.

VIII.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3	05	07	09	11	13	15	17	19
	3	25	27	29	31	33	35	37	39
	3	45	47	49	51	53	55	57	59
A	3	65	67	69	71	73	75	77	79
	3	85	87	89	91	93	95	97	99
	3	05	07	09	11	13	15	17	19
	3	25	27	29	31	33	35	37	39
	3	45	47	49	51	53	55	57	59
B	3	65	67	69	71	73	75	77	79
	3	85	87	89	91	93	95	97	99
	3	05	07	09	11	13	15	17	19
	3	25	27	29	31	33	35	37	39
	3	45	47	49	51	53	55	57	59
C	3	65	67	69	71	73	75	77	79
	3	85	87	89	91	93	95	97	99
	3	05	07	09	11	13	15	17	19

s par 2, 3, 5.

IV

03 𝔄	05 A	07	09 𝔅	11	13	15 F	17	19
23	25 B	27 𝔇	29	31	33 𝔈	35 G	37	39 𝔉
43	45 C	47	49	51 𝔊	53	55 H	57 𝔋	59
63 𝔍	65 D	67	69 𝔎	71	73	75 I	77	79
83	85 E	87 𝔐	89	91	93 𝔑	95 K	97	99 𝔒
03	05 L	07	09	11 𝔄	13	15 Q	17 𝔅	19
23 𝔈	25 M	27	29 𝔇	31	33	35 R	37	39
43	45 N	47 𝔉	49	51	53 𝔊	55 S	57	59 𝔋
63	65 O	67	69	71 𝔍	73	75 T	77 𝔎	79
83	85 P	87	89 𝔐	91	93	95 V	97	99
03	05 A	07 𝔅	09	11	13 𝔈	15 F	17	19 𝔇
23	25 B	27	29	31 𝔈	33	35 G	37 𝔉	39
43	45 C	47	49 𝔋	51	53	55 H	57	59
63	65 D	67 𝔎	69	71	73 𝔏	75 I	77	79 𝔐
83	85 E	87	89	91 𝔑	93	95 K	97 𝔒	99
2	3	4	5	6	7	8	9	10

IV.

par 2, 3, 5.

VIII.

	3	4	5	6	7	8	9	10
	05 A	07	09 𝔅	11	13	15 F	17	19
	25 B	27 𝔇	29	31	33 𝔈	35 G	37	39 𝔉
A	45 C	47	49	51 𝔊	53	55 H	57 𝔋	59
	65 D	67	69 𝔎	71	73	75 I	77	79
	85 E	87 𝔐	89	91	93 𝔑	95 K	97	99 𝔒
	05 L	07	09	11 𝔄	13	15 Q	17 𝔅	19
	25 M	27	29 𝔇	31	33	35 R	37	39
B	45 N	47 𝔉	49	51	53 𝔊	55 S	57	59 𝔋
	65 O	67	69	71 𝔍	73	75 T	77 𝔎	79
	85 P	87	89 𝔐	91	93	95 V	97	99
	05 A	07 𝔅	09	11	13 𝔈	15 F	17	19 𝔇
	25 B	27	29	31 𝔈	33	35 G	37 𝔉	39
C	45 C	47	49 𝔋	51	53	55 H	57	59
	65 D	67 𝔎	69	71	73 𝔏	75 I	77	79 𝔐
	85 E	87	89	91 𝔑	93	95 K	97 𝔒	99

VIII.

IV.

rets.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hindenburg, Carl Friedrich,

Carl Friedrich Hindenburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden nebst Anwendung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel, mit eingestreueten, die Zahlenberechnung überhaupt betreffenden Anmerkungen ; nebst fünf

Leipzig 1776

Math.p. 220
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082014-5
VD18 15318303-001